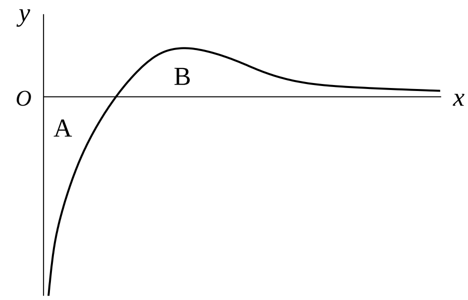
Control #6 MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2003-2

P1.- **(a)** (3.0 ptos.) Sea $f : (0, +\infty) \to I\!R$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ (ver figura). Probar que las áreas A y B son finitas e iguales. Indicación: para probar la igualdad, use el cambio de variables $y = 1/x$.



(b) Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función decreciente y derivable en $I\!R$ tal que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(i) (1.5 ptos.) Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty |f'(x)|\, dx < +\infty$ (converge).

(ii) (1.5 ptos.) Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(3x)\, dx$ converge. Indicación: integre por partes y use **(i)**.

P2.- **(a)** **(i)** (1.5 ptos.) Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{n!}$ converge y calcule su valor.

(ii) (1.5 ptos.) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!+1}{n^n}$.

(b) (3.0 ptos.) Para estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \quad ,$$

calcule primero $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, con esto justifique por qué para x grande $x^{\ln x} \leq e^x$ y luego aplíquelo al análisis de la serie.

P3.- **(a)** (3.0 ptos.) Determine el radio e intervalo de convergencia (analizando los extremos) de la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \ln(n+1)}\, x^n.$$

(b) Dada la sucesión de funciones $f_n : (0, +\infty) \to I\!R$ definida por

$$f_n(x) = e^{-n/x^2} \operatorname{sen}(nx), \quad n \in I\!N.$$

(i) (1.0 ptos) Calcule el límite puntual de $(f_n)_{n \in I\!N}$ en $(0, +\infty)$.

(ii) (2.0 ptos.) Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \left| f_n \left(\frac{\pi(2n+1)^2}{2n} \right) \right|$$

y analice la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_{n \in I\!N}$ en $(0, +\infty)$.

Tpo: 3 horas.