Control 6 MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, F.C.F.M., U. de Chile
Año 2004/2

P1. (a) (i) La parábola $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$ corta el eje Y en $P_0(0,1)$. Considere sobre la parábola el punto $P(a, f(a)), a \geq 0$.
Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento P_0P es igual a $A = a^3$. (1.5 ptos.)

(ii) Dadas las curvas $y = mx$ y $y = x^2$, considere la región limitada por ambas curvas y encuentre el valor de $m > 0$, para que los volúmenes de los sólidos obtenidos al rotar la región definida en torno al eje OX y al eje OY, sean iguales. (1.5 ptos.)

(b) Considere una esfera sólida de radio R(cuyo volumen es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$).
A lo largo de un eje que pasa por el centro de la esfera se hace una perforación cilíndrica de radio "a."
Determinar el valor de a (en función de R)de modo que el volúmen de esfera extraído sea igual al volumen restante. (ver figura)
Indicación: Se sugiere calcular el volúmen restante. (3.0 ptos.)

P2. (a) Estudie la convergencia de las integrales impropias que se indican

(i) $\int_0^1 \frac{\text{arctg } x}{x^2} dx$ (1.0 pto.)

(ii) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}, a \geq 0$ (2.0 ptos.)
en (ii) debe discutir los casos $a > 0$ y $a = 0$

(b) La función $f(x)$ definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ admite una asíntota $x = 1$

(i) Demuestre que el área de la región entre la curva $y = f(x)$, su asíntota y el eje OX, existe y calcule su valor. (1.5 ptos.)

(ii) Calcule, si existe, el volumen de revolución en torno al eje OY generado por la rotación de la región descrita en (i). (1.5 ptos.)

P3. (i) Dada la serie $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots$ se pide escribir su suma parcial s_n, demostrar que la serie converge y calcular su valor. (2.0 ptos.)

(ii) Estudie la convergencia absoluta y condicional de las series

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n^2)}{\sqrt{n^4+4}}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ (2.0 ptos.)

(iii) Sea $g : [0,1] \to I\!R^+$ continua y creciente en $[0,1]$, con $g(0) = 0$.
Pruebe que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si y solo si la integral $\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}dx$ converge.

(2.0 ptos.)

TIEMPO: 3 horas.