Control 6, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (11 de Noviembre)

P1. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

a) Usando sumas de Riemann, demuestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$.

b) Estudie la convergencia de las series $\sum a_n$, $\sum \frac{1}{a_n}$, $\sum (-1)^n a_n$ y $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$.

c) Determine todos los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los que la serie $\sum \frac{a_n}{n^p}$ es convergente.

P2. Para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^\infty f(x)dx, \qquad \text{donde } f(x) = \frac{(x-[x])^x}{x+1},$$

realice lo siguiente:

a) *(1.5 ptos.)* Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, f se acota del modo siguiente:

$$0 \le f(x) \le \frac{(x-n)^n}{n+1} \qquad \forall x \in [n, n+1).$$

b) *(1.5 ptos.)* Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \le \frac{1}{(n+1)^2}.$$

c) *(2.0 ptos.)* Si llamamos $\{s_n\}$ a la sucesión definida por $s_n = \int_1^{n+1} f(x)dx$, pruebe que $\{s_n\}$ es convergente.

d) *(1.0 ptos.)* Concluya que la integral impropia es convergente. Es decir, relacione la variable discreta $n \in \mathbb{N}$ con la variable continua $b \in \mathbb{R}$ que aparece en la definición de la integral impropia:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx.$$

P3.

a) *(4.0 ptos.)* Estudie la convergencia de las siguientes series:

i) $\sum\{1-\cos(1/n)\}$ y $\sum\{1+\cos(1/n)\}$

ii) $\sum(-1)^n \text{sen}\,(1/n)$

iii) $\sum \frac{1}{n(\ln n)\{\ln(\ln n)\}^2}$

iv) $\sum \frac{\text{sen}\,(1+\ln(n!))}{\sqrt{n^4+n+1}}$

b) *(2.0 ptos.)* Considere la región R encerrada entre la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}}$, sus asíntotas verticales y el eje OX. Determine si las integrales impropias que definen el área de R, y los volúmenes engendrados por la rotación de R en torno a los ejes OX y OY, son o no convergentes.

Obs: Algunas fórmulas útiles son

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx, \qquad V = \pi\int_a^b y^2dx, \qquad V = 2\pi\int_a^b xydx, \qquad S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$