Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 27 de Julio del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL RECUPERATIVO PRIMER SEMESTRE

MA12A CALCULO 2000

Problema 1

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ \ln(1-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

(i) (2.0 pts.) Demostrar que $\forall x \in [-1, +\infty), |f(x)| \leq \sqrt{|x|}$

(ii) (2.0 pts.) Usar lo anterior para que f es continua en cero.

b) (2.0 pts.) Sea $g : (0, +\infty) \to (0 + \infty)$ continua, con $\lim\limits_{n\to\infty} g(\frac{1}{n}) = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = 0$. Demostrar que $g((0, +\infty)) = (0, +\infty)$.

Problema 2

a) (4.0 pts.) Considerar la asignación $f(x) = \ln(2x - x^2)$. Determinar: dominio, ceros, inyectividad, signos, continuidad, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y hacer un gráfico.

b) (2.0 pts.) Determinar la existencia de los siguientes límites y en caso de existir calcularlos.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x})$, **(ii)** $\lim\limits_{x\to -\infty}(\frac{e^x}{x})$, **(iii)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$, **(iv)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}$.

Problema 3

a) (2.0 pts.) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x > 0 \\ -g(x) & x < 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

(i) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = g(0)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -g(0)$.

(ii) Demostrar que h es continua en cero si y sólo si $\alpha = g(0) = 0$.

b) (4.0 pts.) Sea $f : A = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función satisfaciendo $\forall x, y \in A, f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. Demostrar las siguientes propiedades para f.

(i) $f(1) = f(-1) = 0$.

(ii) $\forall x \in A, f(x^{-1}) = -f(x)$ y $f(-x) = f(x)$.

(iii) Si $(\forall a > 1, f(a) > 0)$ entonces $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente.

(iv) $\forall x_0, h \in A, f(x_0 + h) = f(x_0) + f(1 + \frac{h}{x_0})$ y deducir que si f es continua en 1 entonces f es continua en A.