Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 02 de Agosto del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL RECUPERATIVO PRIMER SEMESTRE
MA12A CALCULO 2001

Problema 1. Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(1.2 ptos.) (a) Determine el dominio y los ceros de f.

(1.2 ptos.) (b) Estudie la paridad y el crecimiento de f.

(1.2 ptos.) (c) Estudie la continuidad de f. Pruebe que el recorrido de f es todo $\mathbb{R}$.

(1.2 ptos.) (d) Determine las asíntotas de f. Bosqueje el gráfico de f.

(1.2 ptos.) (e) Justifique la invertibilidad de f y encuentre su inversa.

Problema 2.

(a) Analice la convergencia de las siguientes sucesiones y determine el valor del límite cuando éste exista.

(1.0 pto.) (a.1) $((-1)^n + \frac{1}{n})^n$.

(1.0 pto.) (a.2) $\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}}$.

(1.0 pto.) (a.3) $\left(\frac{2n^2+4}{5n^2+1}\right)^n$.

(b) Dado $x_0 \in (0,1)$, considere la fórmula de recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}$$

(1.0 pto.) (b.1) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (0,1)$.

(1.0 pto.) (b.2) Demuestre que (x_n) es creciente.

(1.0 pto.) (b.3) Deduzca que (x_n) converge y determine su límite.

Problema 3.

(3.0 ptos.) (a) Sea la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - 1}{\operatorname{sen}(x)} & \text{si } \ x < 0 \\[2ex] \beta & \text{si } \ x = 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(\gamma + x)}{x} & \text{si } \ x > 0 \end{cases}$$

Encuentre α, β y γ para que f sea continua en $\bar{x} = 0$.

(1.5 ptos.) (b) Sea $f : [a,b] \to (0,+\infty)$ una función continua. Pruebe que $\exists \alpha > 0$ tal que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq \alpha$.

(1.5 ptos.) (c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ una función continua. Pruebe que $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha$.