Control Recuperativo MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería,FCFM, U. de Chile.
Año 2004

P1.- **a)** Considere una sucesión u_n que verifica las siguientes propiedades

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = l, \qquad \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0.$$

i) (1 pto.) Pruebe que $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0,\ k$ par $\Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon$.

ii) (1,5 ptos.) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = l$, y deduzca que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_1 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_1,\ k \text{ impar} \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon.$$

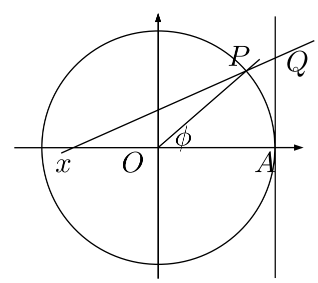
iii) (1,5 ptos.) Demuestre que $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = l$.

b) (2 ptos.) Muestre que una sucesión que satisface

$$|u_{n+2} - u_n| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

no puede ser convergente.
<u>Indicación:</u> recuerde el criterio de Cauchy.

P2.- Sea P un punto sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y denotemos por ϕ el ángulo $\sphericalangle AOP$, donde O es el origen y $A = (1, 0)$. Supongamos $\phi \neq 0$ y sea Q el punto $(1, \lambda)$ con $\lambda \neq \sin(\phi)$. Por los puntos P y Q se traza una recta que corta al eje de las abscisas en un punto de abscisa x.



a) (2 ptos.) Muestre que

$$x = 1 - \frac{\lambda(1 - \cos(\phi))}{\lambda - \sin(\phi)}.$$

b) (4 ptos.) Suponga que λ se escoge de la forma $\lambda = \frac{\sin(\phi)}{1-\phi^k}$ donde $k = 1, 2, 3$ obteniéndose así una función $x_k(\phi)$. Calcular:

i) $\lim\limits_{\phi\to 0} x_1(\phi)$ (para $k = 1$),

ii) $\lim\limits_{\phi\to 0} x_2(\phi)$ (para $k = 2$), y

iii) $\lim\limits_{\phi\to 0^+} x_3(\phi)$ (para $k = 3$).

P3.- **a)** i) (1 pto.) Pruebe la siguiente fórmula

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

ii) (1 pto.) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Muestre que la función definida por $h(x) = \max(f(x), g(x))$ es continua.

b) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} a\frac{\sin(2x)}{\pi - x} & \text{si } x < \pi, \\ b & \text{si } x = \pi, \\ \frac{\ln((1-\pi+x)^2)}{e^x - e^\pi} & \text{si } x > \pi, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

i) (1,5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$.

ii) (1,5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)$.

iii) (1 pto.) ¿Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en π? Si existen, encuéntrelos.

TIEMPO: 3 horas.