Control Recuperativo MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1 (4 de Agosto)

P1. a) Dado $\alpha \in (0,1)$ se define la sucesión $(a_n)_{n\in \mathbb{N}-\{0\}}$ mediante la recurrencia

$$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}\ n \geq 1$$

i) (1.0 pto) Demuestre que $\forall n \geq 1, 0 < a_n < 1$

ii) (2.0 ptos) Demuestre que $(a_n)_{n\in \mathbb{N}-\{0\}}$ converge y calcule su límite.

b) Calcule, si existen, los siguientes límites y en caso de no existir fundamente su respuesta

i) (1.0 pto) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot sen(e^n)}{n^3+5\sqrt{n}}$;

ii) (1.0 pto) $\lim\limits_{n\to\infty} [(-1)^n + \frac{1}{n}]^n$

iii) (1.0 pto) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n+k})}$ (Ind.: acote previamente la suma y use T.Sandwich).

P2. a) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(e^{\alpha x}-1)cos(\pi x)}{\pi sen x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(ln(1+2x)}{(\beta+1)x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

i) (1.5 ptos) Encuentre los valores de α y β en $\mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$.

ii) (0.5 ptos) Explique porqué f no es continua en $\mathbb{R}$.

iii) (1.5 ptos) Usando los valores de α y β encontrados en (i) demuestre que $\exists x_0 \in [-1,0]$ tal que $f(x_0) = 0$.

iv) (0.5 ptos)¿ Es posible que f tenga un cero en $\mathbb{R}^+$. Explique

b) Considere las funciones $f(x) = e^x - e^2$ y $g(x) = cot(x-2)$

i) (0.5 ptos) ¿ Qué sucede con $f(x)$ y $g(x)$ cuando $x \to 2$

ii) (1.5 ptos) Calcule $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$ (Ind.: divida por e^2 y haga ajustes).

P3. Dada la función $f(x) = ln(1+e^x)$ se pide estudiarla, determinando:

i) (1.0 pto) Dominio, ceros (si existen), intersección eje 0Y, continuidad.

ii) (2.0 ptos) Asíntota horizontal calculando $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Asíntota oblicua (Ind.: Puede usar, donde corresponda, que $ln(1+e^x) < ln(2e^x)$ si $x > 0$ y Teorema del Sandwich)

iii) (1.0 pto) Crecimiento y recorrido.

iv) (2.0 pto) Encuentre la función inversa $f^{-1}: A \to B$ indicando A, B y la ecuación de $f^{-1}(x)$. Bosqueje ambas curvas.

Tiempo: 3 horas