Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 23 de Noviembre del 2000.

EXAMEN 1

MA12A CALCULO 2000

Problema 1. Para la asignación $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$ se pide

a) (1.0 pto.) Determinar dominio y paridad.

b) (1.0 pto.) Calcular f' y analizar crecimiento.

c) (1.0 pto.) Encontrar las asíntotas verticales.

d) (1.0 pto.) Calcular f'' y analizar convexidad.

e) (1.0 pto.) Determinar si $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe y en tal caso calcularla.

f) (1.0 pto.) Expresar $f(x)$ como una serie de potencias.

Problema 2. Para $n \in \mathbb{N}$, se define $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x))^n\,dx$. .

a) (2.0 pts.) Calcular I_0, I_1 y demostrar la recurrencia $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1.0 pto.) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.

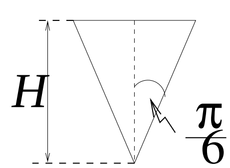
c) (1.0 pto.) Demostrar que $\lim \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.

d) (1.0 pto.) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ y $I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$.

e) (1.0 pto.) Demostrar que $\lim \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\sqrt{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Problema 3.

Considerar un cono lleno de agua, de ángulo basal $\frac{\pi}{6}$ y altura H como muestra la figura. Se desea determinar el radio R de una esfera que al ser sumergida lo más posible en el cono, desplace el máximo de agua.



a) (2.0 pts.) Para $x_0 \in [-R, R]$ demostrar que el volumen del trozo de esfera obtenido al rotar la región $A = \left\{(x, y) : x_0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$ en torno al eje OX es $V = \frac{\pi}{3}(R - x_0)(2R^2 - Rx_0 - x_0^2)$.

b) (2.0 pts.) Demostrar que el volumen de agua desplazado por una esfera de radio R es

$$V(R) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 & \text{si } R < \frac{H}{3} \\ \frac{\pi}{3}(H - R)^2(4R - H) & \text{si } \quad R \in \left[\frac{H}{3}, \frac{2H}{3}\right] \end{cases}$$

c) (2.0 pts.) Encontrar el máximo global de la función $V(R)$ en $\left[0, \frac{2H}{3}\right]$.