Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 3 de Diciembre del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

EXAMEN

MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

(a) (2.0 pts.) Pruebe por integración que la superficie de un cono (manto y base) de altura h y base circular de radio r está dada por

$$S = \pi r\sqrt{r^2+h^2} + \pi r^2.$$

(b) (1.0 pto.) Considere la esfera de radio $R > 0$ y el cono de altura h y base circular de radio r circunscrito a la esfera como se muestra en la figura. Pruebe que

$$\frac{h-R}{R} = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}.$$

(c) (3.0 pts.) Determine las dimensiones (h y r) del cono de superficie (manto y base) mínima circunscrito a la esfera de radio $R > 0$ fijo. Indique el valor de esta superficie.

Problema 2.

(a) (2.0 pts.) Estudie convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$. (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-\cos(1/n))}{1/n}$. Ind.: compare con $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}1/n$.

(b) (2.0 pts.) Demuestre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2}}dx$ converge.

(c) (2.0 pts.) Demuestre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-1/2}\cos(x)dx$ converge. Ind.: utilice integración por partes.

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}dt & \text{si } x \neq 0 \\ -2\alpha e & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donde $\alpha = \int_0^1 e^{-z^2}dz$ es un valor conocido.

(a) (1.2 pts.) Pruebe que f es par, encuentre los ceros de f y estudie su continuidad para $x \neq 0$.

(b) (1.2 pts.) Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^{x^2-1}\frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}dt = -2\alpha e$ y concluya que f es continua en $x = 0$. Ind.: Haga $z = \sqrt{1+t}$.

(c) (1.2 pts.) Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$ para $x > 0$, y estudie crecimiento y convexidad para $x > 0$.

(d) (1.2 pts.) Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2e\left(\sqrt{\pi}/2 - \alpha\right)$, sabiendo que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}/2$.

(e) (1.2 pts.) Bosqueje el gráfico de f en $\mathbb{R}$, indicando su recorrido, mínimos y máximos.