# Examen MA12A Cálculo

**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.**

**Año 2002**

**P1.-**

**(i)** (2 pto) Encuentre el **radio** de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\, x^n.$$

**(ii)** (2 pto) Encuentre el **intervalo** de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{x^n}{n}.$$

**(iii)** (2 pto) Sea

$$f(x) = \int_0^{h(x)} g(t)\, dt,$$

con $g : I\!R \to I\!R$ una función continua con $g(x) > 0$, $\forall x \in I\!R$ y $h : I\!R \to I\!R$ una función derivable en $I\!R$. Calcule $f'$ y demuestre la equivalencia siguiente:

$$f \text{ es creciente} \Leftrightarrow h \text{ es creciente.}$$

**P2.-** Considere la sucesión de funciones definida por:

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, \qquad x \in [0,1],\ n \geq 1.$$

**(i)** (1.2 pto) Calcule $s_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

**(ii)** (1.4 pto) Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$ y deduzca $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$.

**(iii)** (1.2 pto) Demuestre que el límite puntual de $f_n$ es $f(x) = x$, para $x \in [0,1]$.

**(iv)** (1.2 pto) Sea $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$, $x \in [0,1]$. Calcule $g_n'$ y $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)|$, $n \geq 1$. Pruebe que $f_n$ converge uniformemente a $f$.

**(v)** (1 pto) A partir del análisis precedente, dé una manera **alternativa** de calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$.

**P3.-** Analice la función

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Para ello:

**(i)** (1.2 pto) Indique dominio de $f$ y analice la continuidad de $f$ en todo su dominio.

**(ii)** (1.2 pto) Calcule $f'$. Calcule $\lim_{x\to 0+} f'(x)$. Analice crecimiento. Encuentre máximos y mínimos (locales o globales).

**(iii)** (1.2 pto) Calcule $f''$. Estudie concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

**(iv)** (1.2 pto) Estudie $\lim f(x)$ cuando $x \to 1^-$, $x \to 1^+$, $x \to +\infty$. Establezca asíntotas verticales y horizontales.

**(v)** (1.2 pto) Haga un gráfico detallado de la función siguiendo el análisis precedente.

**Tiempo: 3 horas**