EXAMEN

MA12A CALCULO 1999

Problema 1.

Para la función $f(x) = 2\sec(x) - \operatorname{tg}(x)$ en $[0,\pi]$ se pide

a) (2.0 pts.) Encontrar dominio, ceros, signos, asíntotas y puntos de continuidad.

b) (2.0 pts.) Calcular f', analizar el crecimiento de f y encontrar sus mínimos y máximos.

c) (2.0 pts.) Calcular f'', analizar convexidad, encontrar puntos de inflexión y graficar.

Problema 2.

a) (3.0 pts.) Determinar radio e intervalo de convergencia para la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 1} [2^n]\, x^n$$

b) Para la función racional $f(x) = \frac{x}{2x^2-3x+1}$ se pide

i) (1.0 pto.) Descomponerla en fracciones parciales.

ii) (1.0 pto.) Escribir cada fracción como una serie de potencias, indicando el radio de convergencia de cada una de ellas.

iii) (1.0 pto.) Deducir el desarrollo en series de potencias de la función $f(x)$ e indicar su radio de convergencia.

Ind: Recordar que $\frac{1}{1-y} = \sum_{k\geq 0} y^k$ para $|y| < 1$.

Problema 3.

a) (3.0 pts.) Determinar los valores de $a > 0$ y b para que se tenga que

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt}{bx - \operatorname{sen}(x)}\right] = 1$$

Ind: Usar la regla de l'hôpital y el Teorema Fundamental del Cálculo, recordando que para f integrable $\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

b) Sea $f : [1,+\infty)$ una función no negativa y creciente.

i) (1.5 pts.) Usar la partición $P = \{1, 2, ..., n\}$ para probar que, para todo $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx$$

y

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

Ind: Recordar que para f integrable en $[a,b]$ y P una partición de $[a,b]$ se tiene que $s(f,P) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq S(f,P)$.

ii) (1.5 pts.) Sea ahora $f(x) = \ln(x)$. Usar la primera desigualdad para probar que $n! \leq n^{n+1}e^{-n+1}$ y usar la segunda para probar que $n^n e^{-n+1} \leq n!$.

Duración 3.5 hrs.