**Examen, MA12A CALCULO**
**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile**
**Año 2006 (1° de Diciembre)**

**P1.**

a) *(1.5 ptos.)* Estudie el polinomio $P(x) = 2 + 3x^2 - x^3$, indicando crecimientos, máximos y mínimos locales, y signos. En particular pruebe que $\exists x_0 \in [3,4]$ donde $P(x_0) = 0$.

b) Considere la función $F\colon (-1,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ definida por la ley $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{1+t^3}}dt$

b$_1$) *(2.0 ptos.)* Encuentre ceros y signos de $F$ y determine si existen o no los límites de $F(x)$ cuando $x \to -1$ y cuando $x \to +\infty$.

b$_2$) *(1.0 ptos.)* Calcule $F'(x)$ e indique los crecimientos de $F$.

b$_3$) *(1.5 ptos.)* Calcule $F''(x)$. Pruebe que los signos de $F''$ son los mismos que los del polinomio $P$ de la parte (a). Use esto para indicar las concavidades e inflexiones de $F$. Bosqueje el gráfico de $F$.

**P2.**

a) *(1.5 ptos.)* Use el cambio de variables $x = \frac{\pi}{4} - u$, para calcular $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x)dx$.

*Obs.: En su desarrollo, I quedará en función de la misma integral I. Despejala!*

b) *(1.5 ptos.)* Probar que el largo de la elipse de ecuación $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ es igual al largo de la sinusoïde $y = \operatorname{sen} x$, entre 0 y $2\pi$.

c) *(3.0 ptos.)* Calcule los límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \Big(1 + x\Big)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

**P3.**

a) *(2.0 ptos.)* Encuentre el intervalo de convergencia (radio y extremos) de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n} x^n.$$

b) *(2.0 ptos.)* Integrando la serie geométrica $\sum x^n$, calcule el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\frac{1}{e})^n}{n}$.

c) Considere la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = e^{-nx^2} g(nx) + g(x)$, donde $g$ denota a una función conocida tal que $0 \le g(x) \le 1$, $\forall x \ge 0$.

i) *(0.5 ptos.)* Encuentre el límite puntual de $\{f_n\}$ en $[0, +\infty)$.

ii) *(1.0 ptos.)* Dado $q > 0$, estudie la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en $[q, +\infty)$.

iii) *(0.5 ptos.)* Pruebe que si $g(1) = \alpha > 0$ entonces la sucesión de funciones $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, +\infty)$.

*Obs: Puede ser útil recordar las fórmulas siguientes*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx, \qquad V = \pi \int_a^b y^2 dx, \qquad V = 2\pi \int_a^b xy dx, \qquad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$