EXAMEN MA12A, Segunda Fecha, 1999

Problema 1. Para la función $f(x) = (1+x)\, e^{\frac{1}{x}}$ definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se pide

a) (1.0 pto) Determinar los ceros y los intervalos de signo constante para f.

b) (1.5 pts) Analizar los límites de f cuando $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

c) (1.5 pts) Calcular f'. Deducir propiedades de crecimiento para f y determinar sus mínimos y máximos.

d) (1.5 pts) Calcular f''. Analizar su convexidad y puntos de inflexión.

e) (1.0 pto) Bosquejar un gráfico de la función.

Problema 2.

a) (2.0 pts) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{1-x} & 0 \leq x < 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

Determinar a para que f sea continua en $[0,1]$.

b) Sea

$$I_k = \int_0^1 \operatorname{sen}\ (\pi x)\, x^k.$$

i) (2.0 pts) Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_k = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 f(x)\, x^n dx.$$

ii) (2.0 pts) Pruebe que

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_k = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} du.$$

Problema 3

a) (2.0 pts) Analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

b) (2.0 pts) Demostrar que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)}$$

converge y calcular su valor.

c) (2.0 pts) Para (a_n) con $a_n \geq 0$ y $a_1 > 0$ se define $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Demuestre que $\sum_{n \geq 1} b_n$ diverge. Ind: Pruebe que $\sum_{j=1}^{n} b_j \geq a_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

Tiempo: 3:30.

SIN CONSULTAS.