Examen MA12A CÁLCULO
Escuela de Ingeniería, F.C.F.M. U. de Chile
30/11/2004

P1. a) Una persona que se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular de diametro 4 Km., desea llegar a un punto C diametralmente opuesto a A en el otro lado del lago. La persona puede caminar a una velocidad constante de 4 Km/h y remar en un bote a una velocidad constante de 2 Km/h.

i) Plantee la ecuación $T = T(x)$ con $0 \leq x \leq \pi/2$ que describe el tiempo T que demora la persona en recorrer el tramo recto AB (remando) más el arco BC (caminado) en función del ángulo x (ver figura). (2.0 ptos.)

ii) Estudie el crecimiento y concavidades de $T(x)$ y bosqueje su gráfico. (0.8 ptos)

iii) Demuestre que $T(x)$ admite un máximo absoluto y calculelo. (0.6 ptos.)

iv) Determine el valor del ángulo x para llegar al punto C en el mínimo tiempo, indicando que trayectoria debe seguir la persona y en que tiempo cubre el recorrido. (0.6 ptos.)

b) Considere la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Se pide calcular $f^{(n)}(0)$ (n par y n impar).
Para esto puede escoger, a su elección, una de las siguientes formas. (2.0 ptos.)

a) Encuentre una relación de recurrencia para $f^{(n)}(x)$ y determine $f^{(n)}(0)$.

b) Plantee el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ e indentifíquelo con la serie de Taylor (en torno a $x_0 = 0$) que representa a $f(x)$ (puede usar el desarrollo conocido de $\operatorname{sen}(x)$)

P2. a) Considere la sucesión de funciones $f_n : [0, \infty) \to IR$ tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{n-1}{nx} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

i) Encontrar a_n para que $f_n(x)$ sea continua en $[0, \infty)$. (0.6 ptos.)

ii) Calcular $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (límite puntual) (0.8 ptos.)

iii) Estudiar si la convergencia de $f_n(x)$ a $f(x)$ es o no uniforme. (0.6 ptos.)

b) i) Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias (1.0 pto.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n, k \text{ fijo }, k \in N - \{0\}$$

ii) Determine el radio e intervalo de convergencia, analizando los extremos, para la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$$

(1.5 ptos.)

iii) A partir de la serie conocida de la función e^{-x}, encontrar una representación en serie de potencias para $f(x) = x^2\ e^{-x^3}$, y calcule $\int_0^1\ x^2\ e^{-x^3} dx$ para probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{e}$$

(1.5 ptos.)

P3. Considere la función definida por $f(x) = x^2 \ln|x|$. Se pide:

a) i) Dominio, paridad, ceros, signos de $f(x)$. (0.5 ptos.)

ii) Continuidad, reparando donde corresponda. (0.5 ptos.)

iii) Cálculo de $f'(x)$. Analice crecimientos. Encuentre máximos y mínimos (identifique si son locales o absolutos) (1.2 ptos.)

(iv) Cálculo de $f''(x)$. Estudie concavidad, convexidad y puntos de inflexión. (1.2 ptos.)

v) Gráfico aproximado, señalando puntos principales y Recorrido. (0.6 ptos.)

b) i) Calcule el área (finita) de la región encerrada por la curva y el eje OX. (1.0 pto.)

ii) Calcule el volumen de revolución engendrado por la rotación de la región definida en ((b))(i)) en torno al eje OY. (1.0 pto.)

Tiempo: 3 horas