Examen MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-2 (29 de Noviembre 2005)

P1. i) (3.0 ptos) Sea $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Determine los radios e intervalos de convergencia para $f(x), f'(x), f''(x)$.

ii) (3.0 ptos) Encuentre una representación mediante serie de potencias para la función $f(x) = \ell n(3+x)$, y determine radio e intervalo de convergencia de la serie encontratada.

P2. i) (1.5 ptos) Las funciones $f, g : I\!R \to I\!R$ admiten segunda derivada continua en $I\!R, f$ es decreciente y concava en $I\!R$ y g es decreciente y convexa en $I\!R$. Demuestre que g o f es creciente y convexa en $I\!R$.

ii) (1.5 ptos) Considere la función $H(x)$ definida por $H(x) = \int\limits_{1/x}^{x^3} \frac{dt}{e^{t^2}+1}$.
Demuestre que $H(x)$ es estrictamente creciente en $I\!R^+$ y pruebe que

$$\lim_{x\to\infty} H(x) \quad \text{existe.}$$

iii) (3.0 ptos) Una ventana tiene forma de rectángulo terminado por dos semicírculos de diámetros iguales a la mitad de la base del rectángulo. La parte rectangular *ha* de ser de cristal transparente y los semicirculos de cristal opaco
que admite solo la mitad de luz que el cristal
transparente por unidad de superficie.
Si el perímetro total de la ventana debe tener
una longitud fija L, se pide encontrar en función
de L, las dimensiones de la ventana que permita la máxima luminosidad

P3. i) (2.0 ptos) Calcule $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1+(\sqrt{x^2+1})^3}}$

ii) (2.0 ptos) Demuestre que la integral $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x^{3/2}-x^2}}$ converge y calcule su valor
(Indicación: use $x = u^2$)

iii) (2.0 ptos) Dada la elipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$, escriba su longitud total $\mathbf{s}$ (no la calcule) y demuestre que la longitud de cualquier elipse E_λ de semiejes $\lambda \cdot a$ y $\lambda \cdot b, \lambda > 0$ es $\mathbf{s}_\lambda = \lambda \cdot \mathbf{s}$.

Tiempo: 3 horas