U. DE CHILE

INGENIERIA

Examen MA12A CALCULO

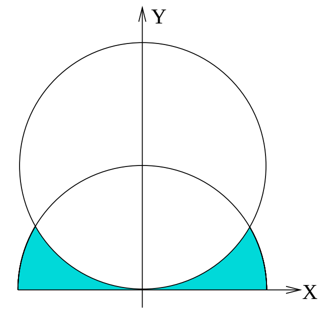
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

9 de Diciembre 2003

P1.- Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r^2; \quad x^2+y^2-2ry \geq 0; \quad y \geq 0\}$$

(Ver Figura)



(a) (2 ptos.) Calcule el volumen del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.
Ind: $V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

(b) (2 ptos.) Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX (Superficie del sólido de la parte (a)).
Ind : $S_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

(c) (2 ptos.) Calcule el volumen del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OY.
Ind : Puede usar $V_{OY} = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$ u otro método.

Observacion : En este problema se sugiere aprovechar simetrías, donde corresponda.

P2.- Estudiar completamente la función: $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, indicando:

(a) (0.5 ptos.) Dominio, recorrido, ceros.

(b) (1.0 ptos.) Continuidad, asíntotas de todo tipo.

(c) (2.0 ptos.) Cálculo de $f'(x)$. Analice crecimientos. Encuentre máximos, mínimos (indique si son locales o globales).

(d) (2.0 ptos.) Cálculo de $f''(x)$. Estudie concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

(e) (0.5 ptos.) Gráfico aproximado, señalando puntos principales.

P3.- Considere la función $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que $f_n(x)$ es estríctamente creciente en $[0,\infty)$ y deduzca que la ecuación $f_n(x) = 1$ posee una única solución positiva, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, que denotaremos x_n.

(b) (1.5 ptos.) Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, definida en la parte anterior, satisface la propiedad $x_{n+1} \in [0, x_n]$ y concluya que existe $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(c) (1.5 ptos.) Encuentre el radio e intervalo de convergencia de la serie $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ y obtenga una expresión analítica para $S(x)$.

(d) (1.5 ptos.) Establezca la desigualdad $f_n(\bar{x}) \leq f_n(x_n) \leq S(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, utilícela para deducir que $S(\bar{x}) = 1$ y calcule $\bar{x}$.

Tiempo: 3 horas