Examen 2^a Fecha, MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, F.C.F.M., U. de Chile
29 de Diciembre de 2005

P1. a) Calcule **(1.0 pto. c/una)**.

i) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ ii) $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx$ iii) $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

b) Calcule **(1.5 ptos. c/una)**.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{e^{x^2}-1}$ ii) $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{e^{x ln(1-\sqrt{x})}} t^2 dt\right]$

P2. a) Considere la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$.

i) Determine su radio e intervalo de convergencia. **(1.0 pto.)**

ii) A partir de la conocida serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, demuestre que la función suma de $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$ es $f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$. **(2.0 pto.)**

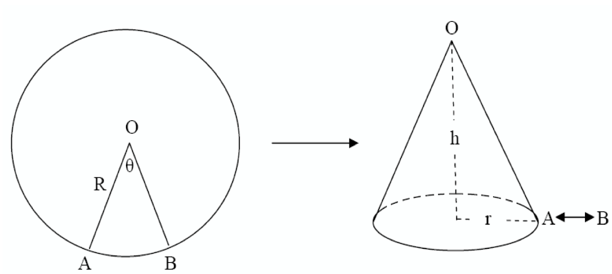
iii) Usando lo anterior calcule, justificando, el valor numérico de las series $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{2^n}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. **(1.0 pto.)**

b) Dada la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

i) Determine convergencia puntual y uniforme de $f_n(x)$ en $\mathbb{R}$. **(1.5 ptos.)**

ii) Determine la convergencia puntual y uniforme de $f_n'(x)$ en $\mathbb{R}$. **(0.5 ptos.)**

P3. A partir de un círculo de papel de radio R, se desea construir un cono, recortando del círculo el sector circular $\widehat{OAB}$ de ángulo central θ y juntando los trazos OA y OB de modo que coincidan.
Se formará de esta manera un cono recto circular cuya base es un círculo de perímetro igual a la longitud del arco circular que queda después del corte, y su altura h puede deducirse del esquema que se muestra.



Para calcular el valor del ángulo θ de modo que el cono formado como se indicó tenga volumen máximo, se pide:

i) Demuestre que el radio basal r del cono es $r = R\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)$. **(0.5 ptos.)**

ii) Demuestre que la altura h del cono es $h = R\sqrt{1-\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$. **(0.5 ptos.)**

iii) Verifique que con la sustitución $x = 1-\frac{\theta}{2\pi}$ el volumen del cono queda $V(x) = \frac{1}{3}\pi R^3 x^2\sqrt{1-x^2}$. **(0.5 ptos.)**

iv) Analice la función $V(x)$ indicando: dominio, ceros, signos de $V(x)$, paridad, cálculo de $V'(x)$, crecimientos y deduzca el valor de x que hace máximo a $V(x)$. **(4.0 ptos.)**

v) Calcule el volumen máximo del cono y el ángulo θ que lo genera. **(0.5 ptos.)**

TIEMPO: 3 horas.