Examen de segunda fecha, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Año 2006 (29 de Diciembre)

P1.

a) *(3 ptos.)* Considere la función g definida por la regla

$$g(x) = \operatorname{sen} x \int_0^x f(t)\cos t\,dt - \cos x \int_0^x f(t)\operatorname{sen} t\,dt,$$

donde f es una función continua en $\mathbb{R}$.

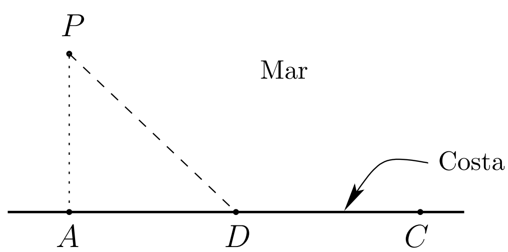
Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $g''(x) + g(x) = f(x)$. Usando esto, demuestre que si $f(0) > 0$, entonces g tiene un mínimo local en $x = 0$.

b) *(3 ptos.)* Calcule, justificando sus pasos, el límite

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{e}{4\pi}(4x^2 - \pi^2) + \int_x^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} t} dt}{1 + \cos(2x)}$$

P2.

a) *(3 ptos.)* En la figura se muestra un pescador P que se encuentra en su bote a 6 km de la costa (mar adentro). A es la proyección perpendicular de P sobre la costa. El pescador debe dirigirse a una caleta C ubicada sobre la costa a 13 km del punto A. Determine en qué punto D debe desembarcar el pescador, de modo que si rema de P a D y luego camina de D a C, minimiza el tiempo total de viaje, sabiendo que rema a una velocidad de 4 km/hr y camina por la costa a una velocidad de 5 km/hr.



Verifique que el punto encontrado es realmente un punto de tiempo mínimo.

b) *(3 ptos.)* Encuentre el valor de $\alpha \in (0,1)$ que maximiza el área de la región R encerrada entre la curva $y = x^\alpha$, el eje OY, la recta $x = 1$ y la recta tangente a la curva por $x = 1$.

Verifique que el punto encontrado es realmente un punto de área máxima.

P3.

a) *(2.0 ptos.)* Encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n\ln(n)}$.

b) *(2.0 ptos.)* Calcule el volumen del sólido de revolución engendrado por la rotación en torno al eje OY de la región del primer cuadrante, encerrada bajo la curva $y = xe^{-x^3}$.

c) *(2.0 ptos.)* Escriba la serie de potencias $\sum a_n x^n$ de la función $f(x) = xe^x$. Calcule la integral $\int_0^1 f(x)dx$ de dos modos distintos para probar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!} = 1$

Obs: Puede ser útil recordar las fórmulas siguientes

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx, \qquad V = \pi\int_a^b y^2dx, \qquad V = 2\pi\int_a^b xydx, \qquad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$