U. DE CHILE

INGENIERIA

Examen 2da fecha MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

P1.- Considere la función definida por $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$. Para ella:

- **(i)** (0.5 ptos) Establezca dominio y encuentre por inspección un cero de f.
- **(ii)** (1 pto) Estudie asíntotas verticales y horizontales.
- **(iii)** (1 pto) Estudie asíntotas oblícuas.
- **(iv)** (1.5 pto) Calcule f' y demuestre que f es estrictamente creciente.
  Indicación: use que $\ln x \leq x - 1$, $\forall x > 0$.
- **(v)** (1 pto) Calcule f''. Estudie convexidad y encuentre puntos de inflexión.
- **(vi)** (1 pto) Haga un bosquejo del gráfico de esta función utilizando el análisis precedente (el gráfico debe ser consecuente con el análisis).

P2.- **(i)** (3 ptos) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \ln(x)\, dx, \qquad \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx, \qquad \int \frac{(\ln(x))^2}{x^2}\, dx.$$

(ii) Sea

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t - t^2}}\, dt$$

- **(a)** (1.5 ptos) Demuestre que la integral $I(x)$ es convergente para $0 < x < 1$.
- **(b)** (1.5 ptos) Calcule $I(x)$ para $0 < x < 1$.
  Indicación: complete el cuadrado al interior de la raíz.

P3.- **(i)** (1.5 ptos) Encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

(ii) (1.5 ptos) Use el criterio integral (verificando las hipótesis para aplicarlo) para estudiar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

(iii) Dada una función $f : I\!R \to I\!R$ continua, se define la función

$$y(x) = \sin(x) \int_0^x f(t)\cos(t)\, dt - \cos(x) \int_0^x f(t)\sin(t)\, dt.$$

- **(a)** (1 pto) Justifique por qué las siguientes derivadas (con respecto a la variable x) existen y calcúlelas:

$$\left(\int_0^x f(t)\cos(t)\, dt\right)', \qquad \left(\int_0^x f(t)\sin(t)\, dt\right)'.$$

(b) (1 pto) Calcule y', y'' y verifique la identidad $y'' + y = f$.

(c) (1 pto) Pruebe que si $f(0) > 0$, entonces y tiene un mínimo local en $x = 0$.

Tiempo: 3.5 horas