

**Examen 2<sup>a</sup> Fecha, MA12A CÁLCULO**  
**Escuela de Ingeniería, F.C.F.M., U. de Chile**  
**27 de diciembre de 2004**

**P1.** Estudie analíticamente la función  $f(x) = e^{1/x} \left[1 + \frac{1}{x}\right]$  para lo cual se pide:

- i) Dominio, ceros, signos de  $f(x)$  (1.0 pto.)
- ii) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ . Analice continuidad. (1.0 pto.)
- iii) Calcular  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ . Indique asíntotas horizontales y verticales. (1.0 pto.)
- iv) Calcular  $f'(x)$ . Analice crecimientos. Encuentre máximos y mínimos. (1.2 ptos.)
- v) Calcular  $f''(x)$ . Estudie concavidad, convexidad y puntos de inflexión. (1.3 ptos.)
- vi) Gráfico aproximado señalando puntos principales y recorrido. (0.5 ptos.)

- P2.**
- i) Estudie la convergencia de la integral  $\int_1^\infty e^{-x} \ln x \, dx$  (1.0 pto.)
  - ii) Demuestre que las integrales  $I = \int_0^\infty e^{-sx} \sin x \, dx$ ,  $s > 0$  y  $J = \int_0^\infty e^{-sx} \cos x \, dx$ ,  $s > 0$  son absolutamente convergentes y calcule sus valores. (2.0 ptos.)
  - iii) La función  $f(x)$  satisface la ecuación  $2 \int_a^x f(t) dt = 2 \sin x - 1$ . Se pide determinar  $f(x)$  y el valor de la constante  $a$ . (1.0 pto.)
  - iv) Probar que si un cilindro circular recto está circunscrito a una esfera de radio  $R$ , entonces dos planos paralelos a la base del cilindro que están separados en  $h$  unidades ( $h < 2R$ ) determinan regiones de igual superficie sobre la esfera y el cilindro. (2.0 ptos.)

**P3.** a) Considere la sucesión de funciones  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  definida por:

$$f_n(x) = n^2(1-x)x^n \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$$

- i) Calcule el límite puntual  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in [0, 1]$  (1.0 pto.)
  - ii) Determine  $dn = \text{Sup}_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (1.5 ptos.)
  - iii) Decida si la convergencia de  $f_n(x)$  a  $f(x)$  es o no uniforme. (0.5 ptos.)
- b) Considere la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{1+b^n}$  con  $0 < a < 1 < b$   
Determine el radio de convergencia de la serie y su intervalo de convergencia analizando los extremos. (3.0 pto.s)

**TIEMPO: 3 HORAS**