Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 19 de Abril del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

PAUTA CONTROL 1

MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente.

(i) (1.5 ptos.) Demuestre que si A satisface

$$\forall x \in A, \exists y \in A, x < y \tag{1}$$

entonces A posee supremo pero no máximo.

Sol.:

(0.5 ptos.) Como A es no vacío y acotado superiormente, el axioma del supremo asegura que A posee supremo.

(0.2 ptos.) A posee máximo $\Leftrightarrow$ $\exists x \in A$, x cota superior de A.

(0.3 ptos.) x es cota superior de $A \Leftrightarrow \forall y \in A, y \leq x$.

(0.5 ptos.) Luego, A no posee máximo $\overset{\text{(0.2 ptos.)}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A$, x no es cota superior de A $\overset{\text{(0.3 ptos.)}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A$, $\exists y \in A, x < y$.

(ii) (1.5 ptos.) Demuestre que si A satisface

$$\exists y \in A, \forall x \in A, x \leq y \tag{2}$$

entonces A tiene máximo.

Sol.: Tenemos que $(\forall x \in A, x \leq y)$ $\overset{\text{(0.5 ptos.)}}{\Longleftrightarrow}$ (y es cota superior de A). Luego, (2) $\overset{\text{(0.5 ptos.)}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists y \in A$, y es cota superior de A $\overset{\text{(0.5 ptos.)}}{\Longleftrightarrow}$ A tiene máximo.

(iii) (1.5 ptos.) Encuentre dos intervalos en $\mathbb{R}$ que sean acotados superiormente y que verifiquen (1) y (2) respectivamente.

Sol.: Dados $a < b$, los intervalos (a, b), $[a, b)$ y $(-\infty, b)$ satisfacen (1), mientras que los intervalos $(a, b]$, $[a, b]$ y $(-\infty, b]$ satisfacen (2). Basta con ejemplos particulares: (-1,0) para (1) y (0,2] para (2). El puntaje es (0.75 ptos.) por cada propiedad si el ejemplo de intervalo esta correcto.

(iv) (1.5 ptos.) Pruebe que si $B \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto inductivo entonces satisface (1), es decir,

$$\forall x \in B, \exists y \in B, x < y$$

Sol.:

(0.5 ptos.) En todo conjunto inductivo B se satisface que: $\forall x \in B, x + 1 \in B$.

(0.5 ptos.) Además, $\forall x \in \mathbb{R}, x < x + 1$.

(0.5 ptos.) Por lo tanto, $\forall x \in B, \exists y := x + 1 \in B, x < y$.

Problema 2.

(i) (2.0 ptos.) Utilizando sólo los axiomas de cuerpo de los números reales, demuestre que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0,\ (a + b)(a^{-1}b^{-1}) = a^{-1} + b^{-1}$$

En cada paso indique claramente cuál axioma está utilizando.

Sol.: Desarrollamos el lado izquierdo utilizando el axioma de distributividad

$$(a + b)(a^{-1}b^{-1}) = a(a^{-1}b^{-1}) + b(a^{-1}b^{-1}) \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

Por el axioma de asociatividad tenemos que $a(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})b^{-1}$ (0.25 ptos.). Por el axioma de los inversos multiplicativos (0.25 ptos.) y el axioma del neutro multiplicativo (0.25 ptos.), lo anterior es igual a b^{-1}.

Del mismo modo, asociando y conmutando obtenemos que $b(a^{-1}b^{-1}) = (bb^{-1})a^{-1}$ (0.25 ptos.). Por el axioma de los inversos multiplicativos (0.25 ptos.) y el axioma del neutro multiplicativo (0.25 ptos.), lo anterior es igual a a^{-1}. Esto demuestra la igualdad.

(ii) (2.0 ptos.) Demuestre que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ (a + b)(a^{-1} + b^{-1}) \geq 4$$

En cada paso indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

Sol.: De la parte anterior sabemos que

$$(a + b)(a^{-1} + b^{-1}) = (a + b)^2 a^{-1}b^{-1} \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

Como $a > 0$ y $b > 0$, sabemos que $a^{-1} >$ y $b^{-1} > 0$. Por lo tanto, $(a + b)^2 a^{-1}b^{-1} \geq 4$ equivale a $(a + b)^2 \geq 4ab$ (0.5 ptos.).

El axioma de compatibilidad de la suma y el orden permite afirmar que $(a+b)^2 \geq 4ab$ es equivalente a $(a + b)^2 - 4ab \geq 0$ (0.5 ptos.).

Finalmente, se verifica que $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$, y como todo número real al cuadrado es positivo, se deduce que la última inecuación es cierta para todo $a > 0$ y $b > 0$ (0.5 ptos.)

(iii) (2.0 ptos.) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1 \tag{3}$$

Sol.: Las expresiones x^2-2x+1 y x^2-3x+2 pueden factorizarse como $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ y $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$. De modo tal que las soluciones de la inecuación (3) son las mismas que las de la siguiente inecuación

$$\frac{|x-1|}{|x-2|} \leq 1, \tag{4}$$

salvo por $x = 1$ que no es solución de (3) (hasta aquí 0.5 ptos.).

La última inecuación (4) es equivalente a

$$-1 \leq \frac{x-1}{x-2} \leq 1, \tag{5}$$

Así, x es solución de (5) si

(a) $x > 2$ y $-(x-2) \leq x-1 \leq x-2$

o bien

(b) $x < 2$ y $-(x-2) \geq x-1 \geq x-2$.

Pero no existe x que satisfaga (a) pues la última desigualdad en ese caso implica que $-1 \leq -2$, lo que es falso (0.5 ptos.).

El conjunto solución a las inecuaciones del caso (b) es el intervalo $]-\infty, \frac{3}{2}]$ (0.5 ptos.)

Por lo tanto, el conjunto solución a la inecuación (5) es el intervalo $(-\infty, \frac{3}{2}]$. Como todas las soluciones de (5) son soluciones de (3) a excepción de $x = 1$, concluimos que el conjunto solución de (3) es $(-\infty, \frac{3}{2}] \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2}]$ (0.5 ptos.).

Problema 3.

Sean $P = (1,0)$, $Q = (0,1)$ y $R = (0,0)$ tres puntos en el plano y consideremos α, β, γ y μ cuatro números reales conocidos cualesquiera. Determine el lugar geométrico de los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\alpha d((x,y),P)^2 + \beta d((x,y),Q)^2 + \gamma d((x,y),R)^2 = \mu$$

Indicación: Analice cuidadosamente todos los casos posibles, distinguiendo en particular los siguientes: (i) $\alpha+\beta+\gamma = 0$, y (ii) $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Sol.: Más explícitamente, se pide encontrar las puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\alpha((x-1)^2+y^2) + \beta(x^2+(y-1)^2) + \gamma(x^2+y^2) = \mu \tag{6}$$

Desarrollando los cuadrados de binomio se tiene:

$$\alpha(x^2-2x+1+y^2) + \beta(x^2+y^2-2y+1) + \gamma(x^2+y^2) = \mu,$$

y reordenando los términos podemos escribir:

$$(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta+\gamma)y^2-2\alpha x-2\beta y+(\alpha+\beta-\mu)=0 \tag{7}$$

Hasta aquí son 2.0 ptos.

(a) Supongamos que $\alpha+\beta+\gamma=0$, en cuyo caso (7) se reduce a la expresión

$$2\alpha x+2\beta y+(\mu-\alpha-\beta)=0 \tag{8}$$

Para determinar el lugar geométrico en este caso debemos distinguir cuatro situaciones:

(a.1) Si $\alpha=\beta=0$ y $\alpha+\beta\neq\mu \Rightarrow$ vacío (0.5 ptos.).

(a.2) Si $\alpha=0$ y $\beta\neq 0 \Rightarrow$ recta horizontal de ecuación $y=\frac{1}{2\beta}(\beta-\mu)$ (0.5 ptos.).

(a.3) Si $\alpha\neq 0$ y $\beta=0 \Rightarrow$ recta vertical de ecuación $x=\frac{1}{2\alpha}(\alpha-\mu)$ (0.5 ptos.).

(a.4) Si $\alpha\neq 0$ y $\beta\neq 0 \Rightarrow$ recta oblicua de ecuación $y=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{1}{2\beta}(\alpha+\beta-\mu)$ (0.5 ptos.).

(b) Supongamos ahora que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, de modo tal que (7) se puede reescribir como

$$x^2+y^2-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}x-\frac{2\beta}{\alpha+\beta+\gamma}y+\frac{\alpha+\beta-\mu}{\alpha+\beta+\gamma}=0,$$

o de manera equivalente

$$\left(x-\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2=\eta, \tag{9}$$

donde

$$\eta:=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}-\frac{\alpha+\beta-\mu}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Por llegar a (9) son 0.5 ptos.

Ahora podemos distinguir las siguientes situaciones:

(b.1) Si $\eta<0 \Rightarrow$ vacío (0.5 ptos.).

(b.2) Si $\eta=0 \Rightarrow$ un punto $(x,y)=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha,\beta)$ (0.5 ptos.).

(b.3) Si $\eta>0 \Rightarrow$ una circunferencia de centro $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha,\beta)$ y de radio $r=\sqrt{\eta}$ (0.5 ptos.).