Pauta Control #1 MA12A Cálculo

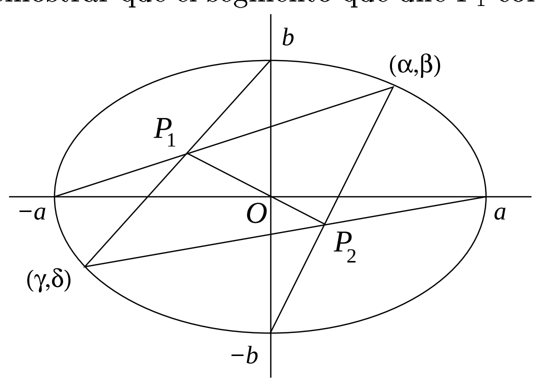
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

Puntuación: P1.- (i)1, (ii)1, (iii)1, (iv)3, P2.- (i)2, (ii)2, (iii)2, P3.- (i)3, (ii)3.

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- En la elipse de semiejes $a > 0$, $b > 0$ centrada en el origen O, el punto (α, β), con $0 < \alpha < a$, $0 < \beta < b$ es un punto cualquiera de la elipse en el primer cuadrante y el punto (γ, δ), con $-a < \gamma < 0$, $-b < \delta < 0$ es un punto cualquiera de la elipse en el tercer cuadrante. El objetivo de esta pregunta es demostrar que el segmento que une P_1 con P_2 contiene al origen.



(i) Si $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, de la figura es claro que $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$. Demuestre que $\quad 0 \in \overline{P_1P_2} \quad$ si $\quad \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0$.

(ii) Determine cuidadosamente las ecuaciones de las cuatro rectas que definen P_1 y P_2.

(iii) Suponiendo conocidos α, β, γ, δ, determine las coordenadas de P_1 y de P_2.

(iv) Utilizando que (α, β), (γ, δ) están en la elipse, pruebe que $0 \in \overline{P_1P_2}$.

Pauta.- **(i)** La recta que pasa por P_1 y P_2 tiene por ecuación $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ pues $x_1 \neq x_2$. Para que el origen pertenezca a la recta, es necesario que $0 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0 - x_1)$, esto es, bastaría que $y_1(x_2 - x_1) = x_1(y_2 - y_1)$, esto es $x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$ lo que es equivalente a $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0$ si $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$ [**0/0.5/1pto**]. Es importante mencionar que el orden lógico es $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0 \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = x_1(y_2 - y_1)$ $\Rightarrow 0 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0 - x_1) \Rightarrow 0 \in \overline{P_1P_2}$ [**-0.5pto si esto no está nada claro**].

(ii) Si L_1 es la recta que pasa por (α, β) y $(-a, 0)$, L_2 es la recta que pasa por (α, β) y $(0, -b)$, L_3 es la recta que pasa por (γ, δ) y $(a, 0)$, L_4 es la recta que pasa por (γ, δ) y $(0, b)$, entonces

$$L_1 :\; y = \frac{\beta}{\alpha + a}(x + a) \qquad L_2 :\; y = \frac{\beta + b}{\alpha}x - b$$

$$L_3 :\; y = \frac{\delta}{\gamma - a}(x - a) \qquad L_4 :\; y = \frac{\delta - b}{\gamma}x + b$$

[0/0.5/1pto] Nota: un error en estas ecuaciones accarrea errores en toda la pregunta, por eso se dice en el enunciado "determine cuidadosamente". En el caso de error, el alumno podrá aún resolver consecuentemente (iii) pero no (iv).

(iii) $P_1 = L_1 \cap L_4$, $P_2 = L_2 \cap L_3$, resolviendo los sistemas se obtiene:

$$x_1 = \gamma \frac{b(\alpha + a) - \beta a}{\gamma\beta - (\alpha + a)(\delta - b)} \qquad y_1 = \frac{\beta}{\alpha + a}(x_1 + a)$$
$$x_2 = \alpha \frac{-b(\gamma - a) + \delta a}{\alpha\delta - (\gamma - a)(\beta + b)} \qquad y_2 = \frac{\delta}{\gamma - a}(x_2 - a)$$

[0/0.5/1pto]. Notas: 1.- la simetría del problema se traduce en la simetría de las expresiones si se intercambia a por $-a$, b por $-b$, α por γ y β por δ. El alumno puede usar este argumento para deducir x_2, y_2 a partir de x_1, y_1 o para deducir L_3, L_4 a partir de L_1, L_2 en la parte (ii). 2.- Si el alumno cometió errores en las ecuaciones de las rectas en (ii) y el cálculo de P_1 y P_2 reviste la misma dificultad, dar todo el puntaje si las coordenadas se calcularon bien en función del error. 3.- Note que se expresó y_1, y_2 en función de x_1, x_2. Esto es una práctica usual para evitar expresiones muy largas y es correcta, siempre que la sustitución sea trivial y no signifique mayores cálculos.

(iv) Usaremos el resultado de (i). Para ello desarrollamos:

$$\begin{aligned}
\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} &= \frac{\beta}{\alpha + a}\left(1 + \frac{a}{x_1}\right) - \frac{\delta}{\gamma - a}\left(1 - \frac{a}{x_2}\right) \\
&= \frac{\beta}{\alpha + a}\left(1 + \frac{a}{\gamma}\frac{\gamma\beta - (\alpha + a)(\delta - b)}{b(\alpha + a) - \beta a}\right) - \frac{\delta}{\gamma - a}\left(1 - \frac{a}{\alpha}\frac{\alpha\delta - (\gamma - a)(\beta + b)}{-b(\gamma - a) + \delta a}\right) \\
&= \frac{\beta}{\gamma(\alpha + a)}\frac{\gamma b(\alpha + a) - \gamma\beta a + \gamma\beta a - a(\alpha + a)(\delta - b)}{b(\alpha + a) - \beta a} \\
&\quad - \frac{\delta}{\alpha(\gamma - a)}\frac{-\alpha b(\gamma - a) + \alpha\delta a - \alpha\delta a + a(\gamma - a)(\beta + b)}{-b(\gamma - a) + \delta a} \\
&= \frac{\beta}{\gamma}\frac{\gamma b - a(\delta - b)}{b(\alpha + a) - \beta a} - \frac{\delta}{\alpha}\frac{-\alpha b + a(\beta + b)}{-b(\gamma - a) + \delta a} \\
&= \frac{-\alpha\beta(\gamma b - \delta a + ab)(\gamma b - \delta a - ab) + \gamma\delta(-\alpha b + \beta a + ab)(-\alpha b + \beta a - ab)}{\%} \\
&= \frac{-\alpha\beta(\gamma^2 b^2 + \delta^2 a^2 - 2\delta\gamma ab - a^2 b^2) + \gamma\delta(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2 - 2\alpha\beta ab - a^2 b^2)}{\%} \\
&= \frac{-\alpha\beta(\gamma^2 b^2 + \delta^2 a^2 - a^2 b^2) - \gamma\delta(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2 - a^2 b^2)}{\%} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Antes del último paso **[0/1/2ptos]**. El último paso usa que (α, β), (γ, δ) están en la elipse **[0/1pto]**.

P2.- **(i)** Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre que:

$$a \in \mathbb{R}, \quad a \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

(Si usa alguna otra propiedad, deberá demostrarla indicando los axiomas que use.)

(ii) Usando propiedades elementales de los reales demostradas en clases, demuestre que si $x, y, w, z \in I\!R$, $w \neq 0$, $z \neq 0$, entonces:

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in I\!R \text{ t.q. } x = \lambda w,\ y = \lambda z.$$

(iii) Usando propiedades elementales de los reales vistas en clases, demuestre que:

$$\forall a, b \in I\!R \qquad a^3 b + ab^3 \leq a^4 + b^4.$$

Pauta.- **(i)** La primera pregunta es delicada ya que no se puede invocar a^{-1} sin antes suponer que $a \neq 0$ [**0/0.5pto**]. Supongamos $a \neq 0$ entonces, multiplicando la igualdad por a^{-1} se obtiene:

$$\begin{array}{rcll}
a \cdot a & = & 0 & / \cdot a^{-1} \quad \text{(Ax. inverso mult.)} \\
(a \cdot a) \cdot a^{-1} & = & 0 \cdot a^{-1} & \text{(Def. suma)} \\
a \cdot (a \cdot a^{-1}) & = & 0 \cdot a^{-1} & \text{(Ax. asociatividad mult.)} \\
a \cdot 1 & = & 0 \cdot a^{-1} & \text{(Ax. inverso mult.)} \\
a & = & 0 \cdot a^{-1} & \text{(Ax. neutro mult.)} \\
a & = & 0 &
\end{array}$$

lo cual lleva a una contradicción [**0/0.5/1pto**]. En el último paso usamos $\forall x \in I\!R$, $x \cdot 0 = 0$, así es que lo demostramos:

$$\begin{array}{rcl}
x \cdot 0 & = & (x \cdot 0 + 0) + 0 \quad \text{(Ax. neutro suma)} \\
& = & (x \cdot 0 + (x \cdot 0 + -(x \cdot 0))) + 0 \quad \text{(Ax. opuesto suma)} \\
& = & ((x \cdot 0 + x \cdot 0) + -(x \cdot 0)) + 0 \quad \text{(Ax. asociatividad suma.)} \\
& = & (x \cdot (0 + 0) + -(x \cdot 0)) + 0 \quad \text{(Ax. distributividad)} \\
& = & (x \cdot 0 + -(x \cdot 0)) + 0 \quad \text{(Ax. neutro suma)} \\
& = & 0 + 0 \quad \text{(Ax. opuesto suma)} \\
& = & 0 \quad \text{(Ax. neutro suma)}
\end{array}$$

[**0/0.5pto**]. Otras demostraciones, por ejemplo partiendo de $x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + 0$ y luego cancelando son válidas, siempre que la cancelación se demuestre o se desglose en axiomas. Otra forma de demostrar sin pasar por esta propiedad es:

$$\begin{array}{rcll}
a \cdot a & = & 0 & / + a \\
(a \cdot a) + a & = & 0 + a & \text{(Def. suma)} \\
(a \cdot a) + a & = & a & \text{(Ax. neutro suma)} \\
(a \cdot a) + (a \cdot 1) & = & a & \text{(Ax. neutro mult.)} \\
a \cdot (a + 1) & = & a & \text{(Ax. distributividad)} \\
& \Rightarrow & & \text{(Unicidad neutro mult.)} \\
a + 1 & = & 1 & / + -1
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(a+1)+-1 &= 1+-1 \quad \text{(Def. suma)}\\
a+(1+-1) &= 1+-1 \quad \text{(Ax. asociatividad suma)}\\
a+0 &= 0 \quad \text{(Ax. opuesto suma)}\\
a &= 0 \quad \text{(Ax. neutro suma)}
\end{aligned}
$$

[0/0.5/1pto] pero en este caso habría que demostrar que el neutro multiplicativo 1 es único, ya que esto es consecuencia de los axiomas **[0/0.5pto]**.

(ii) Sean $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, desarrollando ambos términos:

$$
\begin{aligned}
(xw+yz)^2 &= (x^2+y^2)(w^2+z^2)\\
x^2w^2+2xwyz+y^2z^2 &= x^2w^2+x^2z^2+y^2w^2+y^2z^2\\
2xwyz &= x^2z^2+y^2w^2
\end{aligned}
$$

De donde

$$
(xz-yw)^2 = 0 \text{ y eso implica } xz = yw \tag{1}
$$

[0/0.5/1pto]. Ahora, si $z \neq 0$ entonces $x = \frac{y}{z}w$, y si $w \neq 0$ entonces $y = \frac{x}{w}z$, entonces basta tomar $\lambda = \frac{y}{z} = \frac{x}{w}$ **[0/0.5/1pto]**.

(iii) Hay por lo menos dos formas de resolver. Una es desarrollar $(a-b)^4$ y otra es factorizar el lado izquierdo por ab. Pero ambas usan la desigualdad $2ab \leq a^2+b^2$ que no es necesario demostrar. Por ejemplo la segunda opción de demostración usa esta propiedad dos veces:

$$
\begin{aligned}
a^3b+ab^3 &= ab(a^2+b^2)\\
&\leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2\\
&= \frac{1}{2}(a^4+2a^2b^2+b^4)\\
&= \frac{1}{2}(a^4+b^4)+a^2b^2\\
&\leq \frac{1}{2}(a^4+b^4)+\frac{1}{2}(a^4+b^4)\\
&= (a^4+b^4)
\end{aligned}
$$

[0/1/2ptos].

P3.- **(i)** Resuelva la inecuación:

$$
\frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)\;|x+|x-2||} < \frac{1}{2}.
$$

(ii) Sea b un número real y definamos el conjunto

$$
A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } \;(\forall \varepsilon > 0)\;\; x < b+\varepsilon\}.
$$

Pruebe que A es acotado superiormente y que tiene un supremo. Demuestre además que $\sup A = b$ ¿Tiene A un máximo? Justifique claramente todas sus respuestas.

Pauta.- **(i)** El signo del denominador sugiere separar en dos casos. Las soluciones respectivas son los conjuntos S_1 y S_2.

Caso 1: $x > 2$ (y por ende $2x + 11 > 0$ y $2x - 2 > 0$), queda

$$\begin{aligned}
\frac{x - 2 + 2x + 11}{(x-2)|x + x - 2|} &< \frac{1}{2} \\
\frac{3x+9}{(x-2)(2x-2)} &< \frac{1}{2} \\
2(3x+9) &< (x-2)(2x-2) \\
6x + 18 &< 2x^2 - 2x - 4x + 4 \\
2x^2 - 12x - 14 &> 0 \\
x^2 - 6x - 7 &> 0 \\
(x+1)(x-7) &> 0,
\end{aligned}$$

de donde tenemos

$$S_1 = (\,]-\infty, -1[\cup]7, +\infty[\,) \cap]2, +\infty[=]7, +\infty[$$

[0/0.5/1pto].

Caso 2: $x < 2$ queda:

$$\begin{aligned}
\frac{-x + 2 + |2x+11|}{(x-2)|x - x + 2|} &< \frac{1}{2} \\
-x + 2 + |2x + 11| &> x - 2 \\
|2x + 11| &> 2x - 4,
\end{aligned}$$

de donde $2x + 11 > 2x - 4$ o $2x + 11 < -2x + 4$ esto es $11 > -4$ o $x < -7/4$, o sea

$$S_2 = I\!R \cap]-\infty, 2[=]-\infty, 2[$$

[0/0.5/1pto]. Finalmente

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, 2[\cup]7, +\infty[$$

[0/1pto]. Nota: el alumno puede también restar $1/2$ de ambos lados de la desigualdad y sumando llegar a una expresión del tipo $p/q < 0$, lo cual conduce a un análisis similar al presentado aquí.

(ii)
- A acotado: en efecto tomando $\varepsilon = 1$, $(\forall x \in A)$ $x < b + 1$. En realidad $(\forall x \in A)$, $x < b + \varepsilon_0$, para cualquier $\varepsilon_0 > 0$ fijo. Luego $b + \varepsilon_0$ es cota superior de A para cualquier $\varepsilon_0 > 0$ fijo y entonces A es acotado superiormente **[0/0.5pto]**.
- A no vacío: en efecto $b \in A$ pues $(\forall \varepsilon > 0)$ $b < b + \varepsilon$ **[0/0.5pto]**.
- A tiene supremo: como A es un suconjunto de $I\!R$ no vacío y acotado superiormente el axioma del supremo asegura la existencia de $S \in I\!R$ tal que $S = \sup A$ **[0/0.5pto]**.

- $S \geq b$: en efecto, esto es porque $b \in A$ y S es cota superior de A, luego $b \leq S$ **[0/0.5pto]**.
- $S \leq b$: por contradicción. Si fuera $S > b$ entonces $S - b > 0$ y de la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $S - b > 1/n$, esto es $S > b + 1/n$. Pero $b + 1/n$ es cota superior de A y sería estrictamente más pequeña que el supremo, lo que lleva a una contradicción **[0/0.5pto]**.
- $\max A$: como $\sup A = b$ pertenece a A, entonces A tiene máximo y $\max A = b$ **[0/0.5pto]**.

Nota: los puntajes indicados **[0/0.5/1pto]** significan que en lo posible la puntuación tomará solamente esos valores.

Atte, el Coordinador.