Pauta Control #1 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 09/05 18:00). Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** *(4 ptos.)* Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad, demuestre las siguientes dos propiedades:

- Para todo x, y reales, $(-x)+(-y)$ es opuesto (inverso aditivo) de $x+y$.
- Si a, b, c, d son reales que verifican la relación $(ad)+\Big(-(cb)\Big)=0$ entonces

$$\Big((a+b)d\Big)+\Big(-\Big((c+d)b\Big)\Big)=0.$$

Indicación: mencione en cada paso el axioma utilizado. Si utiliza abreviaciones para los axiomas, dé una lista de éstas al comienzo.

(ii) *(2 ptos.)* Usando la definición de módulo, determine todos los reales que satisfacen la igualdad $|x+2|=|x|+2$.

Pauta.- **(i)** **(4 ptos.)**

- **(1.5 ptos.)** Se utilizan axiomas de la suma de números reales:

$$\begin{aligned}
\Big((-x)+(-y)\Big)+\Big(x+y\Big) &= \Big(\Big((-x)+(-y)\Big)+x\Big)+y && \text{(asociatividad)}\\
&= \Big((-x)+\Big((-y)+x\Big)\Big)+y && \text{(asociatividad)}\\
&= \Big((-x)+\Big(x+(-y)\Big)\Big)+y && \text{(conmutatividad)}\\
&= (-x)+\Big(\Big(x+(-y)\Big)+y\Big) && \text{(asociatividad)}\\
&= (-x)+\Big(x+\Big((-y)+y\Big)\Big) && \text{(asociatividad)}\\
&= \Big((-x)+x\Big)+\Big((-y)+y\Big) && \text{(asociatividad)}\\
&= 0+0 \qquad \text{(inverso)}\\
&= 0 \qquad \text{(neutro)}
\end{aligned}$$

En estricto rigor, esto prueba que $(-x)+(-y)$ es *un* opuesto de $x+y$ (**(0.4 ptos.)** buen uso asociatividad, **(0.4 ptos.)** buen uso conmutatividad, **(0.4 ptos.)** buen uso inverso, **(0.3 ptos.)** buen uso neutro, **(-0.1 pto.)** por cada paso de asociatividad omitido).

Notemos que en algunas secciones pueden aparecer pasos de conmutatividad adicionales dado que los axiomas se establecieron en un orden predeterminado de operación, por ejemplo $a+(-a)=0$ y no $(-a)+a=0$. Esto es pues correcto.

Si se quiere ir más lejos, por unicidad del opuesto se tiene:

$$(-x) + (-y) = -(x + y)$$

lo podría utilizarse en la parte siguiente.

- **(2.5 ptos.)** Se utilizan axiomas de cuerpo de los números reales:

$$\begin{aligned}
\Big((a+b)d\Big) \quad + \quad & \Big(-\Big((c+d)b\Big)\Big) = \\
= \quad & \Big((ad)+(bd)\Big) + \Big(-\Big((cb)+(db)\Big)\Big) \quad \text{(distributividad)} \\
= \quad & \Big((ad)+(bd)\Big) + \Big(\Big(-(cb)\Big) + \Big(-(db)\Big)\Big) \quad \text{(parte (i))} \\
= \quad & (ad) + \Big((bd) + \Big(\Big(-(cb)\Big) + \Big(-(db)\Big)\Big)\Big) \quad \text{(asociatividad +)} \\
= \quad & (ad) + \Big(\Big((bd) + \Big(-(cb)\Big)\Big) + \Big(-(db)\Big)\Big) \quad \text{(asociatividad +)} \\
= \quad & (ad) + \Big(\Big(\Big(-(cb)\Big) + (bd)\Big) + \Big(-(db)\Big)\Big) \quad \text{(conmutatividad +)} \\
= \quad & (ad) + \Big(\Big(-(cb)\Big) + \Big((bd) + \Big(-(db)\Big)\Big)\Big) \quad \text{(asociatividad +)} \\
= \quad & \Big((ad) + \Big(-(cb)\Big)\Big) + \Big((bd) + \Big(-(db)\Big)\Big) \quad \text{(asociatividad +)} \\
= \quad & \Big((ad) + \Big(-(cb)\Big)\Big) + \Big((bd) + \Big(-(bd)\Big)\Big) \quad \text{(conmutatividad $\cdot$)} \\
= \quad & \Big((ad) + \Big(-(cb)\Big)\Big) + 0 \quad \text{(inverso +)} \\
= \quad & 0 + 0 \quad \text{(hipótesis)} \\
= \quad & 0 \quad \text{(neutro +)}
\end{aligned}$$

Vale la misma nota que para la parte precedente sobre los pasos de conmutatividad. Puntaje: **(0.3 ptos.)** buen uso asociatividad, **(0.3 ptos.)** buen uso conmutatividad, **(0.3 ptos.)** buen uso inverso **(0.3 ptos.)** buen uso neutro, **(-0.1 pto.)** por cada paso de asociatividad omitido, **(0.3 ptos.)** buen uso distributividad, **(1 pto.)** buen uso de hipótesis y eventualmente parte (i) habiendo precisado que el inverso es único.
Otra forma de resolver es demostrar que

$$(a + b)d = (c + d)b$$

usando la hipótesis. En efecto

$$\begin{aligned}
(a+b)d &= (ad) + (bd) \quad \text{(distributividad)} \\
&= ((ad) + 0) + (bd) \quad \text{(neutro +)} \\
&= ((ad) + ((-(cb)) + (cb))) + (bd) \quad \text{(inverso +)} \\
&= (((ad) + (-(cb))) + (cb)) + (bd) \quad \text{(asociatividad +)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((ad) + (-(cb)) + ((cb) + (bd)) \quad \text{(asociatividad +)} \\
&= 0 + ((cb) + (bd)) \quad \text{(hipótesis)} \\
&= (cb) + (bd) \quad \text{(neutro)} \\
&= (cb) + (db) \quad \text{(conmutatividad} \cdot\text{)} \\
&= (c + d)b \quad \text{(distributividad)}
\end{aligned}
$$

y entonces

$$\Big((a+b)d\Big) + \Big(-\Big((c+d)b\Big)\Big) = \Big((c+d)b\Big) + \Big(-\Big((c+d)b\Big)\Big) = 0$$

por inverso +. El puntaje es similar que en el método anterior, sólo que aquí no es necesario utilizar la parte (i) ni teoremas de unicidad.

(ii) **(2 ptos.)** Usando la definición de módulo, separamos en casos:

- Si $x \geq 0$ y $x \geq -2$ entonces $x + 2 = x + 2$ lo que es cierto para todo x real de modo que la intersección es $A_1 = \{x \geq 0\}$. **(0.4 ptos.)**
- Si $x < 0$ y $x \geq -2$ entonces $x + 2 = -x + 2$ esto es $2x = 0$ esto es $x = 0$ de modo que la intersección es $A_2 = \emptyset$. **(0.4 ptos.)**
- Si $x \geq 0$ y $x < -2$ la intersección es $A_3 = \emptyset$. **(0.4 ptos.)**
- Si $x < 0$ y $x < -2$ entonces $-x - 2 = -x + 2$ esto es $-2 = 2$ de modo que la intersección es $A_4 = \emptyset$. **(0.4 ptos.)**

La solución es pues $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{x \geq 0\}$. **(0.4 ptos.)**

Otra manera de resolver es la siguiente, pero usa propiedades del módulo más que la definición misma de módulo, por lo que tiene *menos puntaje* **(1 pto.)**, a menos que se prueben usando la definición de módulo las propiedades que se indican entre paréntesis **(1 pto.)**.

Sabemos que $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ siempre que $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
|x+2| = |x| + 2 \quad &\Leftrightarrow \quad |x+2|^2 = (|x|+2)^2 \quad \text{(pues } |x+2| \geq 0 \text{ y } |x| + 2 \geq 0\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = |x|^2 + 2|x| + 4 \quad \text{(porque } |z|^2 = z^2\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = |x|^2 + 2|x| + 4 \quad \text{(cuadrado de binomio)} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2|x| + 4 \quad \text{(de nuevo } |z|^2 = z^2\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad x = |x| \quad \text{(simplificando)} \\
&\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad (|z| = z \text{ ssi } z \geq 0).
\end{aligned}
$$

P2.- **(i)** *(3 ptos.)* Dada la constante $a > 0$, encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} < a.$$

Indicación: exprese la solución en función de los valores que puede tomar la constante a.

(ii) *(3 ptos.)* Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea B el conjunto solución de la inecuación $|4x - 2| > x(1 - 2x)$.

- Resuelva las inecuaciones, esto es, determine A y B.
- Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.
- Indique si existe acotamiento superior e inferior, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de estos 4 conjuntos, esto es, complete la tabla siguiente (puede usar el símbolo $\nexists$ si alguna entrada en la tabla no existe):

cjto.	expresión en intervalos	cota sup.	cota inf.	máx.	mín.	sup.	ínf.
A							
B							
$A \cup B$							
$A \cap B$							

Pauta.- **(i)** **(3 ptos.)** Resolviendo:

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} < a \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} - a < 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2-a^2-ax^2-a^3}{x^2+a^2} < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-a^2-ax^2-a^3 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-a)x^2 - a^2(1+a) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-a)x^2 < a^2(1+a)
\end{aligned}$$

Hasta aquí **(0.6 pto.)** Separemos ahora por casos:

- Si $a < 1$ entonces queda

$$x^2 < \frac{a^2(1+a)}{1-a}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & |x| < \sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}} \\
\Leftrightarrow\ & -\sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}} < x < \sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}}
\end{aligned}$$

- Si $a > 1$ entonces queda

$$x^2 > \frac{a^2(1+a)}{1-a}$$

  Como el lado derecho de la desigualdad es negativo y $x^2 \geq 0$, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. La solución $\left\{x > \sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}}\right\} \cup \left\{x < -\sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}}\right\}$ es incorrecta, pues las cantidades subradicales son negativas.

- Si $a = 1$ entonces queda $1(1+1) > 0$ lo que es cierto para todo real, esto es el conjunto solución en este caso es $\mathbb{R}$.

Puntaje por cada caso **(0.8 pto.)**

(ii) (3 ptos.)

- A:

$$\begin{aligned}
& |x| \leq |x-1| \\
\Leftrightarrow\ & -|x-1| \leq x \quad \text{y} \quad x \leq |x-1| \\
\Leftrightarrow\ & (x-1 \geq -x \quad \text{o} \quad x-1 \leq x) \quad \text{y} \quad (x \leq x-1 \quad \text{o} \quad -x \geq x-1) \\
\Leftrightarrow\ & \left(x \geq \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad -1 \leq 0\right) \quad \text{y} \quad \left(0 \leq -1 \quad \text{o} \quad x \leq \frac{1}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\ \cup\ \mathbb{R}\right) \ \cap\ \left(\emptyset\ \cup\ \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]\right) \\
\Leftrightarrow\ & x \in\ \mathbb{R}\ \cap\ \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \\
\Leftrightarrow\ & x \in\ \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

- B:

$$\begin{aligned}
& |4x-2| > x(1-2x) \\
\Leftrightarrow\ & 4x-2 > x(1-2x) \quad \text{o} \quad 4x-2 < -x(1-2x) \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2+3x-2 > 0 \quad \text{o} \quad 2x^2-5x+2 > 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2(x+2)(x-\frac{1}{2}) > 0 \quad \text{o} \quad 2(x-2)(x-\frac{1}{2}) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \in\ ]-\infty, -2[\ \cup\ \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\ \cup\ \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\ \cup\ ]2, +\infty[\\
\Leftrightarrow\ & x \in\ \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[
\end{aligned}$$

- $A \cup B$: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$
- $A \cap B$: $\mathbb{R}$
- Tabla:

cjto.	expresión en intervalos	cota sup.	cota inf.	máx.	mín.	sup.	ínf.
A	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$	$\exists$ o $\geq \frac{1}{2}$	$\nexists$	$\frac{1}{2}$	$\nexists$	$\frac{1}{2}$	$\nexists$
B	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$A \cup B$	$\mathbb{R}$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$A \cap B$	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	$\exists$ o $> \frac{1}{2}$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\frac{1}{2}$	$\nexists$

Puntaje: **(0.8 pto.)** encontrar A, **(0.8 pto.)** encontrar B, **(0.4 pto.)** encontrar $A \cup B$ y $A \cap B$, **(1 pto.)** llenar la tabla correctamente según los resultados. Es importante corregir $A \cup B$, $A \cap B$ y la tabla de acuerdo a los resultados del alumno, esto es, si cometió un error en resolver las desigualdades esto le resta puntaje en esa parte, pero si luego estableció correctamente la unión o intersección o completó la tabla de manera coherente a sus errores, la parte correspondiente está correcta. Basta mencionar que las cotas superiores o inferiores existen o no, no importa si no se especifica una.

P3.- **(i)** Considere el conjunto A definido por

$$A = \left\{ \frac{1}{|n-m|} \text{ tales que } n, m \in \mathbb{N} \text{ y } n \neq m \right\}$$

(a) *(1.5 ptos.)* Pruebe que 1 es el máximo de A.

(b) *(1.5 ptos.)* Pruebe que 0 es el ínfimo de A. *Indicación: use la Propiedad Arquimediana.*

(ii) Considere la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$. Denotamos por O al origen del sistema de coordenadas.

(a) *(1 pto.)* Si P es un punto de la circunferencia de coordenadas (x_0, y_0), $x_0 \neq 0$, encuentre la ecuación de la recta L que pasa por P y es perpendicular al trazo $\overline{OP}$.

(b) *(1 pto.)* Calcule las coordenadas del punto Q donde la recta L intersecta al eje OX en función de x_0 y de R.

(c) *(1 pto.)* Encuentre la ecuación de la elipse centrada en O que tiene por directriz a la recta vertical por Q y por foco al punto de coordenadas $(x_0, 0)$.

Pauta.- **(i) (a) (1.5 ptos.)**

- ◇ 1 es cota superior de A ya que $n \neq m \Rightarrow |n-m| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|n-m|} \leq 1$. **(1 pto.)** (Nota: no es necesario justificar rigurosamente que la distancia entre dos naturales distintos es a lo menos 1, aunque algunas secciones demostraron esta propiedad por inducción).
- ◇ $1 \in A$ ya que por ejemplo $1 = \frac{1}{|1-2|}$. **(0.2 ptos.)**
- ◇ Conclusión: 1 es el máximo de A. **(0.3 ptos.)** por la definición de máximo.

(b) (1.5 ptos.)

- ◇ 0 es cota inferior de A ya que $n \neq m \Rightarrow |n-m| > 0 \Rightarrow \frac{1}{|n-m|} > 0$. **(0.2 ptos.)**
- ◇ Si hubiera una cota inferior $\varepsilon > 0$ de A, entonces, tomando $m = 1$ fijo, de la propiedad arquimediana $\exists n$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{n-1} < \varepsilon$ con $\frac{1}{n-1} \in A$ y por lo tanto ε no puede ser cota inferior. **(1 pto.)**
- ◇ Conclusión: 0 es el ínfimo de A. **(0.3 ptos.)** por la definición de ínfimo.

(ii) (a) (1 pto.) La pendiente del segmento $\overline{OP}$ es y_0/x_0, entonces la ecuación de la recta pedida es $L : y - y_0 = -x_0/y_0(x - x_0)$.

(b) (1 pto.) Para hallar $Q = (x_Q, 0)$ basta resolver $-y_0 = -x_0/y_0(x_Q - x_0)$ de donde $x_Q = \frac{y_0^2}{x_0} + x_0 = \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0} = R^2/x_0$, esto es $Q = (R^2/x_0, 0)$.

(c) (1 pto.) Busquemos la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si e es la excentricidad de la elipse entonces $ae = x_0$ (foco) y $a/e = R^2/x_0$ (directriz), de donde multiplicando: $a^2 = R^2$, como buscamos $a > 0$ entonces $a = R$ y así $e = x_0/R$. Por otro lado $b^2 = a^2(1 - e^2)$ de donde $b = \sqrt{R^2 - x_0^2}$. También se puede hacer este problemas utilizando la relación $b^2 + c^2 = a^2$ donde $(c, 0)$ es un foco.
Nota (sin puntaje): la elipse queda inscrita entre la circunferencia y las rectas $y = \pm y_0$.