Pauta Control #1 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2004-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** En el cuerpo de los números reales se define $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, $5 = 4+1$ y $6 = 5+1$. Usando sólo los axiomas de los números reales y el hecho que $2 \neq 0$ pruebe las siguientes afirmaciones, detallando todos los pasos y mencionando el axioma o definición que utiliza en cada uno de ellos:

(a) (0,5 ptos.) $3 + 2 = 5$,

(b) (0,7 ptos.) $3 \cdot 2 = 6$,

(c) (0,8 ptos.) $4 \cdot 2^{-1} = 2$.

(ii) **(a)** (2 ptos.) Demuestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0.$$

(b) (2 ptos.) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $x^3 + x = y^3 + y$ entonces $x = y$.

Pauta. **(i)** a)

$$\begin{aligned} 3+2 &= 3 + (1+1) && \text{(definición de 2)} \\ &= (3+1)+1 && \text{(asociatividad de +)} \\ &= 4+1 && \text{(definición de 4)} \\ &= 5 && \text{(definición de 5).} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 &= 3 \cdot (1+1) && \text{(definición de 2)} \\ &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 && \text{(distributividad)} \\ &= 3+3 && \text{(neutro multiplicativo)} \\ &= 3 + (2+1) && \text{(definición de 3)} \\ &= (3+2)+1 && \text{(asociatividad de +)} \\ &= 5+1 && \text{(parte (a))} \\ &= 6 && \text{(definición de 6).} \end{aligned}$$

c) (Primera forma) Primero probemos que $2 + 2 = 4$

$$\begin{aligned} 2+2 &= 2 + (1+1) && \text{(definición de 2)} \\ &= (2+1)+1 && \text{(asociatividad de la suma)} \\ &= 3+1 && \text{(definición de 3)} \\ &= 4 && \text{(definición de 4).} \end{aligned}$$

Como $2 \neq 0$ el inverso multiplicativo de 2 existe: 2^{-1} y luego

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2^{-1} &= (2+2) \cdot 2^{-1} && \text{(fórmula probada anteriormente)}\\
&= 2 \cdot 2^{-1} + 2 \cdot 2^{-1} && \text{(distributividad)}\\
&= 1+1 && \text{(propiedad inverso multiplicativo)}\\
&= 2 && \text{(definición de 2).}
\end{aligned}$$

(Segunda forma) Primero probamos que $2 \cdot 2 = 4$

$$\begin{aligned}
2 \cdot 2 &= 2 \cdot (1+1) && \text{(definición de 2)}\\
&= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 && \text{(distributividad)}\\
&= 2+2 && \text{(propiedad del neutro multiplicativo)}\\
&= 2+(1+1) && \text{(definición de 2)}\\
&= (2+1)+1 && \text{(asociatividad de la suma)}\\
&= 3+1 && \text{(definición de 3)}\\
&= 4 && \text{(definición de 4).}
\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2^{-1} &= (2 \cdot 2) \cdot 2^{-1} && \text{(propiedad probada anteriormente)}\\
&= 2 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) && \text{(asociatividad del producto)}\\
&= 2 \cdot 1 && \text{(propiedad del inverso multiplicativo)}\\
&= 2 && \text{(propiedad del neutro multiplicativo).}
\end{aligned}$$

Notas.

1) Es necesario mencionar en cada paso el axioma o definición que se utiliza. Por este motivo se considera incompleto escribir $3+1+1$, por ejemplo, sin mencionar la asociatividad de la suma.

2) En la parte (b) se utilizó el resultado de (a). En (b) se asigna el puntaje completo si se procede de esta manera, incluso sin haber resuelto (a).

(ii) a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $xy \geq 0$ entonces es directo que

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0, \tag{*}$$

ya que se trata de la suma de tres cantidades mayores o iguales a cero. En el caso $xy < 0$ notemos que $-xy > 0$ y por lo tanto

$$-xy \leq 2(-xy) = -2xy.$$

Pero recordemos que

$$-2xy \leq x^2 + y^2$$

ya que $0 \leq (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (propiedad vista en clases, no es necesario probarla). Luego $-xy \leq x^2 + y^2$ y se deduce que (*) vale también en el caso $xy < 0$.

b) Supongamos que $x^3 + x = y^3 + y$. Entonces

$$x^3 - y^3 + x - y = 0.$$

Pero

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Esta fórmula es conocida y no es necesario probarla. Luego

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) + x - y = 0.$$

Factorizando $(x - y)$ se sigue que

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0.$$

Pero por la parte anterior $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ y por lo tanto $x^2 + xy + y^2 + 1 > 0$. En particular $x^2 + xy + y^2 + 1 \neq 0$ y luego dividiendo por $x^2 + xy + y^2 + 1$ deduce que $x = y$.

Notas.

1) En (ii a) es posible deducir la desigualdad de otras maneras. El puntaje asignado abajo se refiere a la presentación en esta pauta.

Puntaje.

(i a)	0,5 ptos.	baja 0,2 ptos. por no mencionar el axioma correcto
(i b)	0,7 ptos.	”
(i c)	0,8 ptos.	”
(ii a)	0,5 ptos.	por el caso $xy \geq 0$
	0,5 ptos.	por recordar o probar que $-2xy \leq x^2 + y^2$
	1 pto.	Conclusión
(ii b)	0,8 ptos.	por la fórmula $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
	0,4 ptos.	por escribir $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0$
	0,8 ptos.	por argumentar que $x^2 + xy + y^2 + 1 \neq 0$ y concluir

P2.- **(i)** (2 ptos.) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 - 2x| + x|x + 3| \geq 3,$$

y expréselo como unión de intervalos.

(ii) (2 ptos.) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad x^2 = \big|2 - a + |a|\big| - 2a|a| - 6a^2.$$

Escriba su respuesta como unión de intervalos.

(iii) (2 ptos.) Sea $A = \{s + t \mid 0 \leq s < 1, \quad 0 \leq t < 1\}$. Muestre que $\sup A$ e $\inf A$ existen. Encuentre $\sup A$ e $\inf A$ justificando su respuesta. Determine si A tiene mínimo.

Pauta. **(i)** La inecuación se puede reescribir como

$$|x(x-2)| + x|x+3| \geq 3. \qquad (**)$$

Notemos que los "puntos críticos" son -3, 0 y 2, y que $x(x-2) \geq 0$ si $x \leq 0$ o $x \geq 2$, mientras que $x(x-2) \leq 0$ si $0 \leq x \leq 2$.

<u>Caso $x < -3$.</u> En este caso $x(x-2) \geq 0$ y $x+3 < 0$ por lo que (**) es equivalente a

$$x(x-2) - x(x+3) \geq 3.$$

Es decir

$$x^2 - 2x - x^2 - 3x \geq 3$$

y luego

$$-5x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{5}.$$

Por consiguiente, el conjunto solución para este primer caso es $(-\infty, -3)$ (o bien $x < -3$).

<u>Caso $-3 \leq x < 0$.</u> Aquí tenemos $x(x-2) \geq 0$ y $x+3 \geq 0$, con lo cual (**) queda

$$\begin{aligned} & x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x + x^2 + 3x \geq 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^2 + x - 3 \geq 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Las raíces de $2x^2 + x - 3$ son

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = 1 \text{ o } -\frac{3}{2}.$$

Con esto (1) es equivalente a $x \leq -\frac{3}{2}$ o $x \geq 1$ y como conjunto solución en este caso resulta entonces $[-3, -\frac{3}{2}]$ (o bien $-3 \leq x \leq -\frac{3}{2}$).

<u>Caso $0 \leq x < 2$.</u> Ahora $x(x-2) \leq 0$ y $x+3 \geq 0$, y entonces

$$\begin{aligned} & -x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 2x + x^2 + 3x \geq 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 5x \geq 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Obtenemos en este caso el conjunto solución $[\frac{3}{5}, 2)$ (o bien $\frac{3}{5} \leq x < 2$).

<u>Caso $x \geq 2$.</u> Volvemos a encontrar $x(x-2) \geq 0$ y $x+3 \geq 0$ con lo cual obtenemos, al igual que en (1),

$$2x^2 + x - 3 \geq 0,$$

y ya sabemos que esto último es equivalente a $x \leq -\frac{3}{2}$ o $x \geq 1$. Concluimos que en este caso el conjunto solución es $(2, \infty)$ (o bien $x > 2$).

<u>Conclusión.</u> Como resultado del análisis por casos se concluye que el conjunto solución es

$$\Big(-\infty, -\frac{3}{2}\Big] \cup \Big[\frac{3}{5}, \infty\Big),$$

o bien

$$x \leq -\frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{3}{5}.$$

(ii) Primero observemos que si $b \in \mathbb{R}$ entonces la propiedad

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad x^2 = b$$

es equivalente a $b \geq 0$, ya que $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ y por otro lado, si $b \geq 0$ entonces $x = \sqrt{b}$ existe y $x^2 = b$. Por consiguiente debemos resolver la inecuación

$$\big|2 - a + |a|\big| - 2a|a| - 6a^2 \geq 0.$$

Notemos que conviene distinguir los casos $a \geq 0$ y $a < 0$
<u>Caso $a \geq 0$.</u> Tenemos que resolver

$$\begin{aligned} & |2 - a + a| - 2a^2 - 6a^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 - 8a^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \geq 8a^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{4} \geq a^2. \end{aligned}$$

Esto último es equivalente a $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, y obtenemos en este caso el conjunto $[0, \frac{1}{2}]$ (o bien $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$).
<u>Caso $a < 0$.</u> Obtenemos

$$\begin{aligned} & |2 - a - a| + 2a^2 - 6a^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & |2(1 - a)| \geq 4a^2. \end{aligned}$$

Notemos que si $a < 0$ entonces $1 - a > 0$ por lo que debemos resolver

$$\begin{aligned} & 2(1 - a) \geq 4a^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \geq 2a^2 + a - 1. \end{aligned}$$

Las raíces de $2a^2 + a - 1$ son

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \ -1.$$

Luego para este caso el conjunto solución es $[-1, 0)$ (o bien $-1 \leq a < 0$).
<u>Conclusión.</u> El conjunto solución es

$$\Big[-1, \frac{1}{2}\Big]$$

o bien

$$-1 \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

(iii) <u>0 es cota inferior.</u> En efecto, si $0 \leq s < 1$, $0 \leq t < 1$ entonces $s + t \geq 0$. Por el axioma del supremo A tiene ínfimo.

<u>0 es el mínimo y el ínfimo de A.</u> Escogiendo $s = 0$, $t = 0$ vemos que $0 \in A$. De esto y el hecho que 0 es cota inferior se deduce que 0 es el mínimo y el ínfimo de A (este razonamiento se ve en clases).

2 es cota superior. En efecto, si $0 \leq s < 1$, $0 \leq t < 1$ entonces $s + t < 2$. Por el axioma del supremo A tiene supremo.

$\sup A = 2$. Utilizamos la "caracterización con ε", es decir, probaremos que dado $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a \geq 2 - \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $a = s + t$ con $s = t = \text{máx}(0, 1 - \varepsilon/2)$ y notemos que $0 \leq s < 1$, $0 \leq t < 1$. Entonces $a = s + t = 2\,\text{máx}(0, 1 - \varepsilon/2) \in A$. Ahora observemos que si $1 - \varepsilon/2 \geq 0$ entonces $a = 2(1 - \varepsilon/2) = 2 - \varepsilon$. Si $1 - \varepsilon/2 < 0$ tenemos $\varepsilon > 2$ y $a = 0 > 2 - \varepsilon$. En cualquier caso se tiene que $a \geq 2 - \varepsilon$.

Puntaje.

(i)	0,3 ptos.	identificar los puntos -3, 0, 2
	0,2 ptos.	determinar correctamente el signo de $x^2 - 2x$ y $x + 3$ en cada caso
	0,2 ptos.	reescribir correctamente la inecuación en cada caso
	1,2 ptos.	resolver correctamente cada caso (0,3 ptos. por caso)
	0,1 ptos.	concluir
(ii)	0,6 ptos.	darse cuenta que hay que resolver $\big\|2 - a + \|a\|\big\| - 6a\|a\| - 2a^2 \geq 0$ (0,4 por plantearlo y 0,2 por argumentarlo)
	0,6 ptos.	por el caso $a \geq 0$
	0,6 ptos.	por el case $a < 0$
	0,2 ptos.	Conclusión.
(iii)	0,5 ptos.	0 es cota inferior
	0,5 ptos.	0 es mínimo e ínfimo
	0,5 ptos.	2 es cota superior
	0,5 ptos.	2 es el supremo

P3.- Considere una parábola y una recta L que pasa por el foco de ésta. Escoja la posición de la parábola que más le convenga, por ejemplo con directriz vertical o bien horizontal, con el vértice en el origen o bien el foco en el origen. Suponga que L es no vertical de pendiente m y que no es paralela al eje de simetría de la parábola. Denotemos por $p > 0$ la distancia entre el foco y el vértice de la parábola.

(i) (1 pto.) Escriba en términos de p y m una ecuación para la parábola y una para L.

(ii) (1 pto.) Calcule los dos puntos de intersección P y Q de L con la parábola en función de p y m.

(iii) (0,5 ptos.) Encuentre el punto medio A del segmento $\overline{PQ}$.

(iv) (2 ptos.) Pruebe que $dist(A, P) = dist(A, D)$ donde D es la recta directriz de la parábola.

(v) (1,5 ptos.) Pruebe que las rectas tangentes a la parábola en los puntos P y Q son perpendiculares.

Pauta. Daremos las fórmulas en el caso de parábolas de ecuaciones

- $y = \frac{1}{4p}x^2$ que corresponde a una parábola con eje de simetría vertical, vértice en el origen y directriz $y = -p$;
- $y^2 = 4px$, parábola con eje de simetría horizontal, vértice en el origen y directriz $x = -p$;
- $y^2 = 4p(x + p)$, parábola con eje de simetría horizontal, foco en el origen y directriz $x = -2p$.

En estos tres casos p es la distancia del foco al vértice de la parábola.

Parábola de ecuación $y = \frac{1}{4p}x^2$.

(i) EL foco es el punto $(0, p)$ por lo que

$$L: \quad y = p + mx.$$

(ii) Para encontrar los puntos de intersección debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= p + mx \\ y &= \frac{1}{4p}x^2. \end{aligned}$$

Igualando obtenemos $p + mx = \frac{1}{4p}x^2$, es decir

$$\frac{1}{4p}x^2 - mx - p = 0,$$

cuyas raíces son

$$x_{\pm} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 1}}{1/(2p)} = 2pm \pm 2p\sqrt{m^2 + 1}. \tag{2}$$

Por lo tanto los puntos de intersección son

$$P = (x_+, y_+) \quad Q = (x_-, y_-),$$

donde $x_{\pm}$ viene dado por (2) e $y_{\pm}$ viene dado por

$$y_{\pm} = 2pm^2 \pm 2pm\sqrt{m^2 + 1} + p.$$

(iii) El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ se puede encontrar de la fórmula

$$A = \left(\frac{x_+ + x_-}{2}, \frac{y_+ + y_-}{2} \right),$$

(Generalmente esto se ve en clases; no es necesario demostrarla.) Encontramos

$$A = (2pm, 2pm^2 + p)$$

(iv) Calculemos la distancia entre A y P

$$\begin{aligned} dist(A,P) &= \sqrt{(2pm-(2pm+2p\sqrt{m^2+1}))^2+((2pm^2+p)-(2pm^2+2pm\sqrt{m^2+1}+p))^2} \\ &= \sqrt{4p^2(m^2+1)+4p^2m^2(m^2+1)} \\ &= \sqrt{4p^2(m^2+1)(1+m^2)} \\ &= 2p(m^2+1). \end{aligned}$$

Por otro lado, la directriz D tiene ecuación $y=-p$ y por lo tanto la distancia entre A y D es

$$dist(A,D) = 2pm^2+p-(-p) = 2pm^2+2p = 2p(m^2+1).$$

(v) La fórmula para la recta tangente a la parábola de ecuación $y=\frac{1}{4p}x^2$ en un punto (x_0,y_0) de ésta viene dada por

$$y+y_0 = \frac{1}{2p}xx_0.$$

Por lo tanto la recta tangente en P tiene ecuación

$$y+y_+ = \frac{1}{2p}xx_+,$$

y su pendiente es

$$m_1 = \frac{x_+}{2p}.$$

La recta tangente por Q tiene ecuación

$$y+y_- = \frac{1}{2p}xx_-,$$

y su pendiente es

$$m_2 = \frac{x_-}{2p}.$$

Para probar que ambas rectas son perpendiculares entre sí basta verificar que

$$m_1m_2 = -1,$$

ya que ninguna de estas rectas es vertical ni horizontal. Utilizando las expresiones en (2) tenemos que

$$\begin{aligned} m_1m_2 &= \frac{x_+}{2p}\frac{x_-}{2p} \\ &= \frac{(2pm+2p\sqrt{m^2+1})(2pm-2p\sqrt{m^2+1})}{4p^2} \\ &= \frac{4p^2m^2-4p^2(m^2+1)}{4p^2} \\ &= \frac{-4p^2}{4p^2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Parábola de ecuación $y^2 = 4px$.

(i) El foco es $(p, 0)$ y L tiene ecuación

$$L: \quad y = m(x - p).$$

(ii) El sistema a resolver es

$$\begin{aligned} y &= m(x-p) \\ y^2 &= 4px. \end{aligned}$$

De la primera ecuación $x = \frac{y}{m} + p$ ($m \neq 0$ porque suponemos que la recta es no horizontal), y reemplazando encontramos $y^2 = 4p(\frac{y}{m} + p)$ o $y^2 - \frac{4p}{m} y - 4p^2 = 0$. Luego

$$P = (x_+, y_+) \quad Q = (x_-, y_-),$$

con

$$y_\pm = \frac{2p}{m} \pm 2p\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1},$$

y

$$x_\pm = \frac{2p}{m^2} \pm \frac{2p}{m}\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} + p.$$

(iii) El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es

$$A = \left(\frac{2p}{m^2} + p, \frac{2p}{m} \right).$$

(iv)

$$\begin{aligned} dist(A,P) &= \sqrt{\left(\frac{2p}{m^2} + p - \left(\frac{2p}{m^2} + \frac{2p}{m}\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} + p \right) \right)^2 + \left(\frac{2p}{m} - \left(\frac{2p}{m} + 2p\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} \right) \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4p^2}{m^2}\left(\frac{1}{m^2} + 1 \right) + 4p^2 \left(\frac{1}{m^2} + 1 \right)} \\ &= 2p\left(\frac{1}{m^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

Por otro lado la directriz D tiene ecuación $x = -p$ y luego

$$dist(A,D) = \frac{2p}{m^2} + p - (-p) = 2p\left(\frac{1}{m^2} + 1 \right).$$

(v) La recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto (x_0, y_0) de ésta tiene ecuación

$$yy_0 = 2p(x + x_0).$$

Luego la recta tangente en P tiene ecuación

$$yy_+ = 2p(x + x_+),$$

y su pendiente es

$$m_1 = \frac{2p}{y_+}.$$

La recta tangente por Q tiene ecuación

$$yy_- = 2p(x + x_-),$$

y su pendiente es

$$m_2 = \frac{2p}{y_-}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= \frac{2p}{y_+}\frac{2p}{y_-} \\ &= \frac{4p^2}{\left(\frac{2p}{m} + 2p\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}\right)\left(\frac{2p}{m} - 2p\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}\right)} \\ &= \frac{4p^2}{\frac{4p^2}{m^2} - 4p^2\left(\frac{1}{m^2}+1\right)} \\ &= \frac{4p^2}{-4p^2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

<u>Parábola de ecuación $y^2 = 4p(x + p)$.</u>

(i) El foco es $(0, 0)$ y L

$$L: \quad y = mx.$$

(ii) Sistema

$$\begin{aligned} y &= mx \\ y^2 &= 4p(x + p). \end{aligned}$$

Se encuentra

$$P = (x_+, y_+) \quad Q = (x_-, y_-),$$

con

$$y_\pm = \frac{2p}{m} \pm 2p\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1},$$

y

$$x_\pm = \frac{2p}{m^2} \pm \frac{2p}{m}\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}.$$

(iii)

$$A = \left(\frac{2p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right).$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
dist(A,P) &= \sqrt{\left(\frac{2p}{m^2}-\left(\frac{2p}{m^2}+\frac{2p}{m}\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}\right)\right)^2+\left(\frac{2p}{m}-\left(\frac{2p}{m}+2p\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4p^2}{m^2}\left(\frac{1}{m^2}+1\right)+4p^2\left(\frac{1}{m^2}+1\right)} \\
&= 2p\left(\frac{1}{m^2}+1\right)
\end{aligned}
$$

Por otro lado la directriz D tiene ecuación $x=-2p$ y luego

$$dist(A,D)=\frac{2p}{m^2}-(-2p)=2p\left(\frac{1}{m^2}+1\right).$$

(v) La recta tangente a la parábola $y^2=4px$ en un punto (x_0,y_0) de ésta tiene ecuación

$$yy_0=2p(x+x_0+2p).$$

La recta tangente en P tiene ecuación

$$yy_+=2p(x+x_++2p),$$

y su pendiente es

$$m_1=\frac{2p}{y_+}.$$

La recta tangente por Q tiene ecuación

$$yy_-=2p(x+x_-+2p),$$

y su pendiente es

$$m_2=\frac{2p}{y_-}.$$

$m_1m_2=-1$ se verifica de la misma manera que en el caso anterior.

Puntaje.

(i)	0,5 ptos.	ecuación de la parábola
	0,5 ptos.	conocer el foco, ecuación de la recta
(ii)	0,3 ptos.	plantear el sistema
	0,7 ptos.	resolverlo correctamente
(iii)	0,5 ptos.	encontrar el punto medio
(iv)	0,8 ptos.	calcular $dist(A,P)$
	0,6 ptos.	identificar la recta directriz D
	0,6 ptos.	calcular $dist(A,D)$
(v)	0,5 ptos.	conocer la ecuación de la recta tangente a la parábola
	0,5 ptos.	criterio para reconocer rectas perpendiculares
	0,5 ptos.	verificación