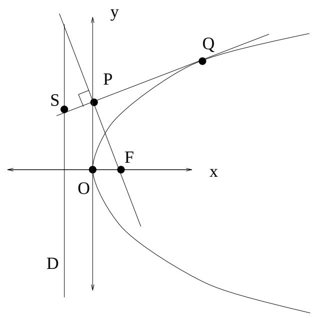
Solución Control 1, MA12A

Problema 1. Dada la parábola $y^2 = 4px$, cuyo foco es F, y un punto $P \neq (0,0)$ sobre el eje OY, demostrar que la recta por P y perpendicular a FP es tangente a la parábola. Determinar las coordenadas del punto de tangencia Q. Demostrar que $SF \perp FQ$, donde S es el punto de intersección de la recta L con la directriz de la parábola.



Solución

La pendiente de la recta L que pasa por $P = (0, \beta)$ y $F = (p, 0)$ es $m = -\frac{\beta}{p}$
La recta L' perpendicular a L que pasa por P es:

$$L' : \quad y = \frac{p}{\beta}x + \beta$$

Veamos que L' y la parábola tienen un sólo punto en común. Esto equivale a mostrar que el discriminante de la ecuación de segundo grado

$$(\frac{p}{\beta}x + \beta)^2 = 4px \qquad \equiv \qquad \frac{p^2}{\beta^2}x^2 + x(2p - 4p) + \beta^2 = 0.$$

es cero. En efecto, $(-2p)^2 - 4\frac{p^2}{\beta^2}\beta^2 = 4p^2 - 4p^2 = 0$ luego, L' es tangente a la parábola (2.0 pts.).

Las coordenadas de $Q = (a, b)$ se obtienen de la ecuación anterior como

$$a = \frac{2p}{2\frac{p^2}{\beta^2}} = \frac{\beta^2}{p} \text{ y } b = \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\beta^2}{p} + \beta = 2\beta (2.0 pts.).$$

La pendiente de la recta T que pasa por $Q = (\frac{\beta^2}{p}, 2\beta)$ y $F = (p, 0)$ está dada por

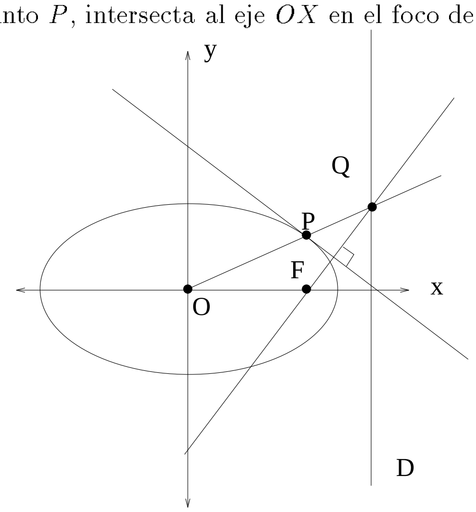
$$\frac{2\beta}{\frac{\beta^2}{p} - p} = \frac{2\beta p}{\beta^2 - p^2}$$

Las coordenadas del punto S se calculan al intersectar la recta L' con la recta d ecuación $x = -p$. Luego, $S = (-p, \frac{p}{\beta}(-p) + \beta) = (-p, \frac{\beta^2 - p^2}{\beta})$. Así, la pendiente de la recta T' que pasa por S y F está dada por:

$$\frac{\frac{\beta^2 - p^2}{\beta}}{-p - p} = -\frac{\beta^2 - p^2}{2p\beta}$$

lo que prueba que T y T' son perpendiculares(2.0 pts.).

Problema 2. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto Q sobre su directriz. El trazo QO(O origen del sistema) corta a la elipse en un punto P. Muestre que la recta que pasa por Q y que es perpendicular a la recta tangente a la elipse en el punto P, intersecta al eje OX en el foco de la elipse.



Solución

Sea $Q = (\frac{a}{e}, \alpha)$ un punto sobre la directriz derecha de la elipse. La recta L que pasa por O y Q tiene ecuación:

$$y = \frac{\alpha e}{a} x \text{ (1.0 pt.)}.$$

La intersección de L con la elipse ocurre en dos puntos de los cuales P corresponde a aquel de coordenadas positivas. Entonces, P tiene como primera coordenada la solución positiva de la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + (\frac{\alpha e}{a})^2 \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \equiv \quad \frac{1}{(a^2 + (\frac{\alpha e}{ab})^2)} x^2 = 1$$

Luego $P = (x_0, y_0) = (\frac{a^2b^2}{b^2+(be\alpha)^2}, \frac{\alpha e a b^2}{b^2+(be\alpha)^2})$ (2.0 pt.).

La tangente a la elipse en $P = (x_0, y_0)$ tiene pendiente m dada por

$$-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = -\frac{b^2}{ae\alpha} \text{ (1.0 pt.)}.$$

La recta L' perpendicular a la tangente y que pasa por Q está dada por:

$$y - \alpha = \frac{ae\alpha}{b^2}(x - \frac{a}{e}) \text{ (1.0 pt.)}.$$

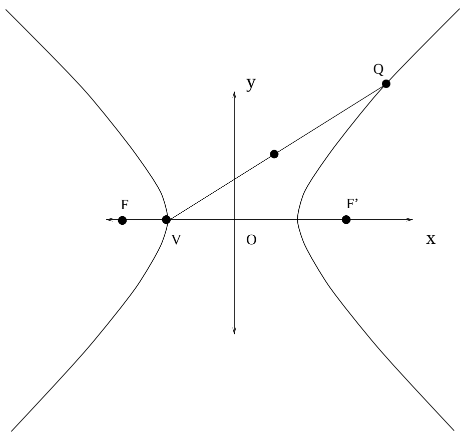
Lo que debemos mostrar es que $F = (ae, 0)$ verifica la ecuación anterior. En efecto, como $b = a\sqrt{1-e^2}$, se tiene que

$$ae - \frac{a}{e} = \frac{a}{e}(e^2 - 1) = -\frac{b^2}{ae}$$

y entonces

$$\alpha + \frac{ae\alpha}{b^2}(x - \frac{a}{e}) = 0 \text{ (1.0 pt.)}.$$

Problema 3. Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios a los trazos VQ, donde V es el vértice izquierdo de la hipérbola y Q un punto cualquiera de ella.



Solución

Sea L la recta que pasa por $V = (-a, 0)$ y de pendiente m, $L: \quad y = m(x+a)$
Busquemos la intersección de L con la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} = \frac{m^2(x+a)^2}{b^2} \quad \text{que equivale a} \quad (x^2 - a^2)b^2 = a^2m^2(x+a)^2$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: una es $x = -a$ con $y = 0$, o sea el vértice izquierdo de la hipérbola, y la otra se despeja de la siguiente ecuación

$$(x-a)b^2 = a^2m^2(x+a) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a^3m^2 + ab^2}{b^2 - a^2m^2} \text{ (2.0 pts.).}$$

Observe que el punto medio entre V y V es V mismo, de modo V pertenece al lugar geométrico buscado. Asi, el lugar geométrico pedido son los puntos $(\alpha, \beta) \neq V$ que satisfacen las ecuaciones:

$$\alpha = \frac{x_0 - a}{2} = \frac{a^3m^2}{b^2 - a^2m^2} \quad \text{y} \quad \beta = m(\alpha + a)$$

Calculando el valor de m de la última ecuación y reemplazándolo en la primera se obtiene:

$$\alpha = \frac{a^3\beta^2}{b^2(\alpha+a)^2 - a^2\beta^2} \quad \text{o equivalentemente} \quad \alpha b^2(\alpha+a)^2 - \alpha\beta^2a^2 - a^3\beta^2 = 0$$

Como $(\alpha, \beta) \neq V$ las soluciones satisfacen la relación

$$b^2(\alpha^2 + \alpha a) - \beta^2a^2 = 0 \quad \text{que equivale a } b^2((\alpha + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}) - \beta^2a^2 = 0$$

Esta última ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{(\alpha + \frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \text{ (2.0 pt.)}$$

Luego el lugar geométrico es una hipérbola centrada en $(-\frac{a}{2}, 0)$ y con excentricidad $e' = \sqrt{1 + 4\frac{b^2}{a^2}}$. Las ecuaciones de sus directrices son

$$D': \quad x = -\frac{a}{2e'} \quad D: \quad x = \frac{a}{2e'},$$

sus focos F y F' están dados por

$$F = (-\frac{ae'}{2}, 0) \quad F' = (\frac{ae'}{2}, 0)$$

y sus vértices son V y $(0, 0)$(2.0 pts.).