Problema 1

1. (2.0 ptos.) Demostrar, utilizando los axiomas de los números reales que

$$\forall x, y \in R \quad x, y \neq 0 \quad x^{-1} + y^{-1} = (x+y)(x^{-1}y^{-1})$$

en cada paso diga cual o cuales axiomas o propiedades está utilizando.

Solución: Desarrollaremos el lado derecho utilizando la distributividad

$$(x+y)(x^{-1}y^{-1}) = x(x^{-1}y^{-1}) + y(x^{-1}y^{-1}) \quad 0.5 \text{ ptos.}$$

Asociando tenemos que $x(x^{-1}y^{-1}) = (xx^{-1})y^{-1}$ (0.25 ptos.). Por el axioma de los inversos multiplicativos (0.25 ptos) y el axioma del neutro multiplicativo (0.25 ptos) lo anterior es igual a y^{-1}.

Del mismo modo asociando y conmutando obtenemos que $y(x^{-1}y^{-1}) = (yy^{-1})x^{-1}$ (0.25 ptos.). Por el axioma de los inversos multiplicativos (0.25 ptos) y el axioma del neutro multiplicativo (0.25 ptos) lo anterior es igual a x^{-1}. Lo que demuestra la igualdad.

2. (2.0 ptos.) Demuestre que

$$\forall x, y \in R, \quad x, y > 0 \quad (x+y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4$$

indique que axiomas o propiedades del orden está utilizando.

Solución: Utilizando la parte anterior sabemos que

$(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) = (x+y)^2x^{-1}y^{-1}$ (0.5 ptos.). Como $x > 0$ e $y > 0$ sabemos que $x^{-1} > 0$ y que $y^{-1} > 0$. Por lo tanto $(x+y)^2x^{-1}y^{-1} \geq 4$ equivale a $(x+y)^2 \geq 4xy$ (0.5 ptos.).

El axioma de compatibilidad de la suma y el orden permite afirmar que $(x+y)^2 \geq 4xy$ es equivalente con $(x+y)^2 - 4xy \geq 0$. (0.5 ptos.).

Además, $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$ y como todo número real al cuadrado es positivo, sabemos que la última inecuación es cierta para todo $x > 0$ e $y > 0$ (0.5ptos.).

3. (2.0 ptos.) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1 \quad (1)$

Solución: Las expresiones $x^2 - 2x + 1$ y $x^2 - 3x + 2$ pueden factorizarse como $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ y $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. De modo que las soluciones de la inecuación (1) son las mismas que las de la inecuación

$\left|\frac{(x-1)}{(x-2)}\right| \leq 1 \quad (2)$ salvo la solución $x = 1$ (0.5 ptos.)

Esta última inecuación es equivalente a

$-1 \leq \frac{(x-1)}{(x-2)} \leq 1 \quad (3)$

Así x es solución de la inecuación (3) si

(a) $x > 2$ y $-(x-2) \leq x-1 \leq x-2$ o bien

(b) $x < 2$ y $-(x-2) \geq x-1 \geq x-2$.

En el caso (a) no existe x que satisfaga las tres desigualdades pues una de ellas ($-1 \leq -2$) es siempre falsa (0.5 ptos.).

La solución a las inecuaciones del caso (b) es el intervalo $]-\infty, \frac{3}{2}]$ (0.5 ptos.).

Por lo tanto la solución a la inecuación (3) es el intervalo $]-\infty, \frac{3}{2}]$. Como todas las soluciones de (3) son soluciones de (1) a excepción de $x = 1$ concluimos que el conjunto solución es $]-\infty, \frac{3}{2}] \setminus \{1\}$ (0.5 ptos.).

Problema 2

1. (a) (2.0 ptos.) Sea $a \in R$, $a \neq 1$ y $A = \{x \in R : \quad x > 0 \text{ y } \frac{ax}{1+x} \geq 1\}$. Encontrar, si es que existen, ínfimo, supremo, mínimo y máximo de A_n.

   Solución: $x \in A$ ssi $x > 0$ y $\frac{ax}{1+x} \geq 1$. Esto equivale a que $x > 0$ y $(a-1)x \geq 1$ pues $1 + x > 0$ (0.5 ptos.). Debemos distinguir los casos $a > 1$ y $a < 1$. En el primer caso la inecuación equivale a $x \geq \frac{1}{a-1}$, es decir $A = [\frac{1}{a-1}, +\infty[$ (0.25 ptos.). Por lo tanto A no posee ni supremo ni máximo, pues no es acotado superiormente (0.25 ptos). Además posee ínfimo y mínimo que está dado por $\frac{1}{a-1}$ (0.25 ptos.).

   En el caso $a < 1$ la inecuación que debe satisfacer x es $x \leq \frac{1}{a-1}$, es decir $A =]-\infty, \frac{1}{a-1}]$ (0.25 ptos.). Por lo tanto A no posee ni ínfimo ni mínimo, pues no es acotado inferiormente (0.25 ptos). Además posee supremo y máximo que está dado por $\frac{1}{a-1}$ (0.25 ptos.).

   (b) (2.0 ptos.) Probar que $\inf\{\frac{1}{2n+1} : \ n \in N\} = 0$.

   Claramente 0 es una cota inferior del conjunto pues $\frac{1}{2n+1} > 0$ (0.5 ptos.). Sea l otra cota inferior del conjunto. Veamos que l debe ser menor que 0. Supongamos que $l > 0$. Entonces debemos encontrar un elemento del conjunto que sea menor que l. Esto se consigue buscando n tal que $\frac{1}{2n+1} < l$ lo que equivale a $\frac{1-l}{2l} < n$ (0.5 ptos.). Como N no es acotado sabemos que existe un n_0 tal que $\frac{1-l}{2l} < n_0$ (0.5 ptos.). Así, $\frac{1}{2n_0+1} < l$ lo que implica que existe un elemento del conjunto que es menor que l. Concluimos que l no puede ser una cota inferior del conjunto (0.5 ptos.).

2. (2.0 ptos.) Dada la parábola de ecuación $y^2 = 4p(x-p)$ para $p > 0$, determine los puntos P y Q (P con coordenadas positivas) de ella, de modo que las tangentes a la parábola por estos puntos pasen por el origen. Calcule la distancia de P a la tangente que pasa por Q.

   Indicación: La ecuación de la tangente por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a un parábola de ecuación $y^2 = 4p(x-p)$ es: $y\beta = 4p(\frac{x+\alpha}{2} - p)$.

   Solución: Para que $(0,0)$ satisfaga $y\beta = 4p(\frac{x+\alpha}{2} - p)$ se debe tener que $\alpha = 2p$ (0.5 ptos.). Por lo tanto $P = (2p, 2p)$, $Q = (2p, -2p)$ y las rectas buscadas son $y = x$ e $y = -x$ (1.0 ptos.). Estas rectas son ortogonales de modo que la distancia de P a la tangente que pasa por Q es la distancia de P al origen, que es $2\sqrt{2}p$ (0.5ptos.).

Problema 3

1. (3.0 ptos) Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La recta $y = \frac{b}{a}x$ intersecta a la elipse en los puntos P y R (P con coordenadas positivas). Determinar el área del rectangulo inscrito en la elipse que tiene como diagonal el trazo PR y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

   Solución: La abscisa del punto P se obtiene al reemplazar $y = \frac{b}{a}x$ en la ecuación de la elipse. $x^2(\frac{2}{a^2}) = 1$ (1.0 pto.). Entonces $P = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ (0.5 ptos.). El área buscada será cuatro veces el área del rectángulo con vértices el origen y P y con lados paralelos a los ejes coordenados (0.5 ptos.). Esta última es $\frac{ab}{2}$, por lo que el área total será $2ab$ (1.0 ptos.).

2. (3.0 ptos) Considere la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 1$. Una recta variable L que pasa por el origen, intersecta a la circunferencia en los puntos P y R. Otra recta L' que pasa por el origen, ortogonal a L, intersecta a la circunferencia en los puntos Q y S. Determinar el lugar geométrico de la intersección de las tangentes a la circunferencia por los puntos P y Q.

   Solución: Debemos analizar separadamente los casos L oblicúa y L no oblicúa. En el primero de ellos, sea $y = mx$ la ecuación de la recta L. La abscisa del punto P se obtiene al reemplazar la ecuación de la recta variable $y = mx$ en la ecuación de la circunferencia. Esto nos da $x^2(1 + m^2) = 1$ y entonces $P = (\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}})$ (0.5 ptos.). El punto Q se obtiene de manera análoga considerando la recta de ecuación $y = -\frac{1}{m}x$. Entonces $Q = (\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}})$ (0.5 ptos.). La intersección de la tangente por P y la tangente por Q está dada por la solución del sistema

$$\frac{x}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{my}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \qquad \frac{mx}{\sqrt{1+m^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+m^2}} = 1$$

   Multiplicando por $\sqrt{1+m^2}$ ambas ecuaciones y luego elevando al cuadrado obtemos:

$$(x+my)^2 = (1+m^2) \qquad (mx-y)^2 = (1+m^2)$$

   Luego al sumar ambas ecuaciones obtenemos:

$$x^2 + 2mxy + m^2y^2 + m^2x^2 - 2mxy + y^2 = 2(1+m^2)$$

   simplificando por $(1+m^2)$ nos queda $x^2 + y^2 = 2$ (1.0 ptos.). Cuando la recta variable L no es oblicúa los puntos de intersección son $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (0.5 ptos.). Por lo tanto el lugar geométrico es una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y centrada en el origen (0.5 ptos.).

   Indicación: La ecuación de la tangente por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a un circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = r^2$ es: $x\alpha + y\beta = r^2$.