Pauta Control #1 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1

(i) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2+3x|+x|x+3|+x^2 \geq 7+|1+x^2|$$

Observar que $1+x^2>0$ de modo que $|1+x^2|=1+x^2$.
La inecuación se reduce a $|x^2+3x|+x|x+3|+x^2 \geq 7+1+x^2$ es decir $|x^2+3x|+x|x+3| \geq 8$ o bien $|x||x+3|+x|x+3| \geq 8$ y factorizando $|x+3|(|x|+x) \geq 8$. **(0.5 ptos.)**
Si $x \leq 0, |x|+x=0$ de modo que $|x+3| \cdot 0 \geq 8$
conduce a una desigualdad imposible: Solución ϕ.
Si $x>0$ la inecuación queda $(x+3)(x+x) \geq 8$ es decir $2x(x+3) \geq 8 \Leftrightarrow x^2+3x-4 \geq 0$
$\Leftrightarrow (x+4)(x-1) \geq 0$ entonces $x \in (-\infty,-4] \cup [1,\infty)$.
Pero $x>0 \Rightarrow x \in (0,\infty)$. Así $x \in (0,\infty) \cap [(-\infty-4] \cup [1,\infty)]$.
Es decir, la solución es $x \in [1,\infty)$. **(1.5 ptos.)**

OBSERVACION También puede resolverse distinguiendo los puntos criticos 0 y -3, es decir, efectuar el análisis en $(-\infty,-3), [-3,0)$ y $[0,\infty)$.

(ii) Demuestre que $\forall a,b,c,d \in I\!R$ tales que $a^2+b^2=1 \wedge c^2+d^2=1$.
Entonces $ac+bd \leq 1$
Por propiedad (en clases) se puede usar que $x^2+y^2 \geq 2xy \quad \forall x,y \in I\!R$
Entonces, sumando las igualdades de la hipótesis queda

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2 \Rightarrow 2ac+2bd \leq (a^2+c^2)+(b^2+d^2)=2 \Rightarrow ac+bd \leq 1$$

(2.0 ptos.)

(iii) Para los siguientes conjuntos de números reales indique, si existen, conjunto de cotas superiores e inferiores, máximos, mínimos, supremos e ínfimos.

$$A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n} \Big/ n \in I\!N-\{0\}\right\}; B=\{x \in Q/1 \leq x^2 \leq 2\}$$

Para el conjunto A, desarrollado por extensión se ve que

$$A=\left\{0, \frac{3}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{-4}{5}, \ldots, -1+\frac{1}{2k-1}, 1+\frac{1}{2k}, \ldots\right\}$$

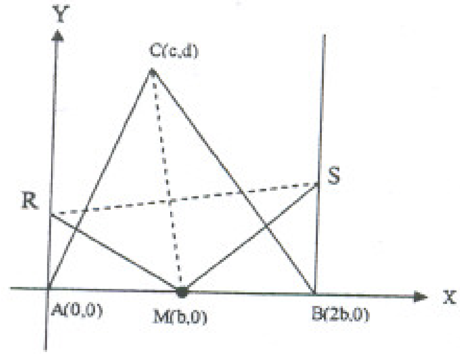
De modo que los elementos de A satisfacen:
Para n par, $n = 2k$, $k \in I\!N - \{0\}$ $\quad 1 < 1 + \frac{1}{2k} \leq \frac{3}{2}$.
Para n impar, $n = 2k-1, k \in I\!N - \{0\}$ $\quad -1 < -1 + \frac{1}{2k-1} \leq 0$.
Así, el conjunto de las cotas inferiores de A es: $(-\infty, -1]$
el conjunto de las cotas superiores de A es: $[\frac{3}{2}, \infty)$
$\text{máx}(A) = \frac{3}{2} (\frac{3}{2} \in A)$, mín A: NO EXISTE.
$\text{Sup}(A) = \frac{3}{2} = \max(A)$, $\inf(A) = -1$ **(1.0 pto.)**
0.25 c/parte

Para el conjunto B, sus elementos deben cumplir
$x \in Q \wedge 1 \leq x^2 \leq 2$, es decir , $x \in Q \wedge x^2 \leq 2 \wedge x^2 \geq 1 \Rightarrow x \in Q \wedge x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \wedge x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\Rightarrow x \in Q \wedge x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\} \Rightarrow x \in Q \wedge x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$

Entonces cotas superiores de $B : [\sqrt{2}, \infty)$
cotas inferiores de $B : (-\infty, -\sqrt{2}]$.
$\text{máx}(B)$: NO EXISTE pués $\sqrt{2} \notin Q$
$\text{mín}(B)$: NO EXISTE pués $-\sqrt{2} \notin Q$
$\text{Sup}(B) = \sqrt{2}$, $\inf(B) = -\sqrt{2}$ **(1.0 pto.)**
0.25 c/parte

Problema 2

(i) Considerar el triángulo de vértices $A(0,0), B(2b,0)$ y $C(c,d)$ y la recta L perpendicular a AB en el punto B.
Por M, punto medio de AB se traza la perpendicular al lado AC que corta al eje OY en el punto R y por el mismo punto M se traza la perpendicular al lado BC que corta a la recta L en S.
Demostrar que $RS \perp CM$



Calculamos las pendientes que interesan

$$m_{AC} = \frac{d}{c},\ m_{BC} = \frac{d}{c-2b},\ m_{CM} = \frac{d}{c-b}\ (M \text{ es pto. medio})$$ **(0.6 ptos.)**

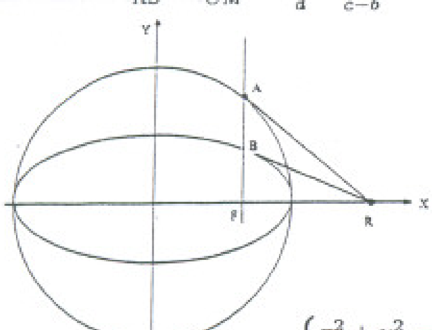
Entonces $m_{MR} = -\frac{c}{d}$ pués $\overline{MR} \perp \overline{AC}$
y $m_{MS} = \frac{2b-c}{d}$ pués $\overline{MS} \perp \overline{CB}$ **(0.6 ptos.)**
Entonces $L_{MR} : y = -\frac{c}{d}(x-b)$ y como $R \in OY \Rightarrow x_R = 0$.
así $y_R = \frac{cb}{d}$, entonces $\underline{R(0, \frac{cb}{d})}$
Recta $L_{MS} \perp L_{BC}$ $\quad y = \frac{2b-c}{d}(x-b)$ y como $S \in L \to$ Vertical en B.

$$x_S = 2b \Rightarrow y_S = \frac{2b-c}{d}(2b-b) = \frac{(2b-c)b}{d} \text{ entonces } S\left(2b, \frac{(2b-c)b}{d}\right)$$

(0.9 ptos.)

Así, m_{RS} = Pendiente de recta por R y $S = \frac{y_S-y_R}{x_S-x_R} = \frac{\frac{2b^2-bc}{d}-\frac{bc}{d}}{2b} =$
$\Rightarrow m_{RS} = \frac{2b^2-2bc}{2bd} = \frac{b-c}{d}$. Además $m_{CM} = \frac{y_C-y_M}{x_C-x_M} = \frac{d-0}{c-b}$.
Entonces $m_{RS} \cdot m_{CM} = \frac{b-c}{d} \cdot \frac{d}{c-b} = -1 \quad \therefore L_{RS} \perp L_{CM}$ **(0.9 ptos.)**

(ii)



Datos

Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\odot \quad x^2 + y^2 = a^2$

Foco $F(c,0)$ en que $c = ae$
Perpendicular por $F : \mathcal{X} = ae$

Para el punto $A : \overline{FA} \cap \odot \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \mathcal{X} = ae = c \end{cases} \Rightarrow A(c, \sqrt{a^2-c^2})$

Para el punto $B : \overline{FB} \cap$ Elipse $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \mathcal{X} = ae = c \end{cases} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} \Rightarrow y_B = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2} \Rightarrow B\big(c, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}\big)$ **(1.0 pto.)**
Entonces: Tangente a $\odot$ en A (Desdoblando)

$$cx + \sqrt{a^2-c^2}y = a^2$$ **(0.5 ptos.)**

Tangente a $\odot \cap$ eje $x : y = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{ae} = \frac{a}{e}$ **(0.5 ptos.)**
Tangente a la elipse (Desdoblando) (en el punto B)

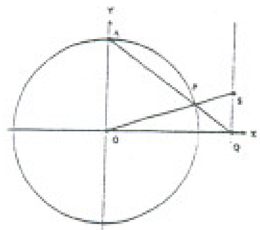
$$\frac{cx}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}\right)}{b^2} = 1$$ **(0.5 ptos.)**

Tangente en $B \cap$ eje $X : y = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{ae} = \frac{a}{e}$ **(0.5 ptos.)**
Así, ambas tangentes cortan al eje OX en $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ que corresponde al pie de la directriz

Problema 3

Considere la $\odot x^2 + y^2 = r^2$ y su punto superior $A(0, r)$.
Por un punto $P(x_0, y_0)$ cualquiera de la $\odot$ se traza la recta AP, la cual corta al eje OX en un punto Q.

(i) Demuestre que el L.G. de la intersección de la recta OP (0 es el origen) con la vertical por Q es una parábola.



Sea $P(x_0, y_0) \in \odot$
Recta $AP : y - r = \frac{r-y_0}{-x_0}x$
Recta $AP \cap$ eje $OX, Y_Q = 0$
$\Rightarrow X_Q = \frac{rx_0}{r-y_0}$ **(1.0 pto.)**

El LG se encuentra en $L_{OP} \cap L$ vertical en Q.

$$\text{Entonces } : L_{OP} : Y = \frac{y_0}{x_0}\mathcal{X}$$
$$\text{Vertical } : X = \frac{rx_0}{r-y_0} \quad \text{Todo punto del } LG \text{ satisface ambas rectas}$$

Entonces si

$$S \in LG \Rightarrow Y_S = \frac{y_0}{x_0}X_s \Rightarrow x_0 Y_s = y_0 X_s$$
$$X_S = \frac{rx_0}{r-y_0} \Rightarrow (r - y_0)X_s = rx_0$$

Despejando x_0 e y_0 en función de X_S, Y_S se tiene.

$$y_0 X_S = x_0 Y_s$$
$$(r - y_0)X_s = x_0 r \rightarrow \text{ dividiendo } \Rightarrow \frac{y_0}{r-y_0} = \frac{Y_S}{r}$$

$\Rightarrow ry_0 = rY_S - y_0 Y_S \Rightarrow y_0 = \frac{rY_S}{r+Y_S} \wedge x_0 = \frac{rY_S}{r+Y_S}\frac{X_S}{Y_S}$
Entonces $x_0 = \frac{rX_s}{r+Y_s} \wedge y_0 = \frac{rY_s}{r+Y_s}$ **(2.0 ptos.)**
Pero $P(x_0, y_0) \in \odot \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = r^2$. Reemplazando

$$\frac{r^2 X_S^2}{(r+Y_S)^2} + \frac{r^2 \cdot Y_S^2}{(r+Y_S)^2} = r^2 \Rightarrow (r + Y_S)^2 = X_S^2 + Y_S^2$$
$$\Rightarrow r^2 + 2rY_S + Y_S^2 = X_S^2 + Y_S^2 \Rightarrow Y_S = \frac{1}{2r}X_S^2 - \frac{r}{2}$$

Entonces el LG (generalizando) es la PARABOLA

$$y = \frac{1}{2r}x^2 - \frac{r}{2}$$ **(1.0 pto.)**

OTRA FORMA

Puede suponerse que el punto S del LG tiene coordenadas $S(\alpha, \beta)$.
Entonces, la recta $OS \cap \odot$ dará las coordenadas de P

$$\begin{cases} \odot x^2 + y^2 = r^2 \\ L_{OS} : Y = \frac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2 = r^2 \Rightarrow \mathcal{X}_p = \frac{\alpha r}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}; Y_p = \frac{\beta r}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Ahora, la recta AP en que $A(0,r)$ y $P\left(\frac{\alpha r}{\sqrt{\alpha^2+p^2}}, \frac{\beta r}{\sqrt{\alpha^2+p^2}}\right)$ **(1.0 pto.)**

cortará al eje OX en Q, que debe tener igual abscisa que S puesto que se requiere que QS sea vertical.

Entonces $L_{AP}: Y - r = \frac{\frac{\beta r}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - r}{\frac{\alpha r}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}} X = \frac{\beta - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha} X$

Entonces $L_{AP}: Y - r = \frac{\beta - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha} X$

$Q = L_{AP} \cap OX \Rightarrow Y = 0; X_Q = -\frac{r\alpha}{\beta - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ **(1.5 ptos.)**

Pero $X_Q = X_S = \alpha$.

Así, el LG queda definido por $-\frac{r\alpha}{\beta - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \alpha$

$\Rightarrow r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \beta \Rightarrow (r+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow r^2 + 2r\beta = \alpha^2$

Generalizando $(\alpha, \beta) \rightsquigarrow (x, y) \Rightarrow LG$ es $\boxed{y = \frac{1}{2r}x^2 - \frac{r}{2}}$ PARÁBOLA. **(1.5 ptos.)**

(ii) Determine el vértice, foco y directriz de la parábola (LG)

Reconocimiento de la Parábola: Se escribe como $\boxed{x^2 = 2r\left(y - \frac{r}{2}\right)}$

De la parábola vertical general $y = ax^2 + bx + c$, Vertice $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

En este caso $V\left(0, -\frac{r}{2}\right)$ y para el foco $4p = 2r \Rightarrow p = \frac{r}{2}$ **(0.5 ptos.)**

Así, el Foco es $Y_F = Y_V + p = \frac{-r}{2} + \frac{r}{2} = 0$ Entonces $\begin{cases} \text{Foco } (0,0) \\ \text{Directriz } y = -r \end{cases}$ **(1.5 ptos.)**