MA12A- Cálculo I
Control 1 - Año 2006

Fecha: Sábado 22 de Abril de 2006

Solución Problema 1. (a.i) (1.5 puntos) Debe probarse que el inverso multiplicativo de ab es el real $a^{-1}b^{-1}$.
Es decir, debe probarse que $(ab) \cdot (a^{-1}b^{-1}) = 1$.

Esto último se prueba calculando el lado izquierdo del modo siguiente

$$
\begin{aligned}
(ab) \cdot \left(a^{-1}b^{-1}\right) &= (ab) \cdot \left(b^{-1}a^{-1}\right) && ;\text{Se ha conmutado} \\
&= a \cdot \left(b \cdot \left(b^{-1}a^{-1}\right)\right) && ;\text{Se ha asociado} \\
&= a \cdot \left(\left(b \cdot b^{-1}\right) \cdot a^{-1}\right) && ;\text{Se ha asociado nuevamente} \\
&= a \cdot \left(1 \cdot a^{-1}\right) && ;\text{Se ha usado la definición de inverso de } b \\
&= a \cdot a^{-1} && ;\text{Se ha usado la definición de neutro multiplicativo} \\
&= 1 && ;\text{Se ha usado la definición de inverso de } a
\end{aligned}
$$

Solución Problema 1. (a.ii) (1.5 puntos) Debe probarse que el opuesto de a^{-1} es el real $(-a)^{-1}$.
Es decir debe probarse que $a^{-1} + (-a)^{-1} = 0$.

Esto se prueba calculando en lado izquierdo del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
a^{-1} + (-a)^{-1} &= a^{-1}(-a)(-a)^{-1} + aa^{-1}(-a)^{-1} \\
&= (a-a)a^{-1}(-a)^{-1} \\
&= 0 \cdot a^{-1}(-a)^{-1} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

En esta demostración, se ha usado que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Esta propiedad debe probarse para concluir completamente la demostración anterior.

Una posible demostración es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot (0+0) \\
&= a \cdot 0 + a \cdot 0.
\end{aligned}
$$

sumando $-(a \cdot 0)$en ambos lados de la igualdad anterior se obtiene que

$$
\begin{aligned}
0 &= a \cdot 0 - a \cdot 0 = (a \cdot 0 + a \cdot 0) - a \cdot 0 \\
&= a \cdot 0 + (a \cdot 0 - a \cdot 0) \\
&= a \cdot 0 + 0 \\
&= a \cdot 0.
\end{aligned}
$$

Solución parte (b) (3 puntos)

Solución 1: Usando puntos de corte.

La expresión $x^2 - x - 2$ tiene los puntos de corte -1 y 2. De modo que

$$\begin{array}{lll} x^2 - x - 2 \geq 0 & \text{cuando} & x \in I = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \\ x^2 - x - 2 < 0 & \text{cuando} & x \in J = (-1, 2) \end{array}$$

Por esta razón, la inecuación la resolvemos en dos casos, en I y en J.

Caso 1: $(x \in I)$

Aquí la inecuación se escribe como

$$\begin{aligned} & \left|x^2 - x - 2\right| \leq \frac{2}{3}x + 2 \\ \iff \quad & x^2 - x - 2 \leq \frac{2}{3}x + 2 \\ \iff \quad & x^2 - \frac{5}{3}x - 4 \leq 0 \\ \iff \quad & 3x^2 - 5x - 12 \leq 0 \end{aligned}$$

cuya solución en $\mathbb{R}$ es $[x_1, x_2]$, donde $x_{1,2}$ están dados por la fórmula

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{6} \\ &= \frac{5 \pm 13}{6}, \end{aligned}$$

es decir $x_1 = -\frac{4}{3}$ y $x_2 = 3$.

Por lo tanto, la solución en I es $x \in [-\frac{4}{3}, -1] \cup [2, 3]$.

Caso 2: $(x \in J)$

Aquí la inecuación se escribe como

$$\begin{aligned} & \left|x^2 - x - 2\right| \leq \frac{2}{3}x + 2 \\ \iff \quad & -x^2 + x + 2 \leq \frac{2}{3}x + 2 \\ \iff \quad & -x^2 + \frac{1}{3}x \leq 0 \\ \iff \quad & x \cdot \left(\frac{1}{3} - x\right) \leq 0. \end{aligned}$$

La solución de esta inecuación en $\mathbb{R}$ es $x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{3}, \infty)$.

En el intervalo J la solución es $x \in (-1, 0] \cup [\frac{1}{3}, 2)$.

Juntando las soluciones de los dos casos estudiados, se concluye que la solución final de la inecuación es

$$x \in [-\frac{4}{3}, 0] \cup [\frac{1}{3}, 3].$$

Solución 2: Usando propiedades del módulo

La inecuación es equivalente a

$$-\left(\frac{2}{3}x+2\right) \leq x^2-x-2 \leq \frac{2}{3}x+2.$$

Cada desigualdad corresponde a una inecuación que puede resolverese por separado.

Primera Inecuación:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{2}{3}x+2\right) \leq x^2-x-2 \\ \iff \quad & x^2-\frac{x}{3} \geq 0 \\ \iff \quad & x \in (-\infty,0] \cup [\frac{1}{3},+\infty) \end{aligned}$$

Segunda Inecuación:

$$\begin{aligned} & x^2-x-2 \leq \frac{2}{3}x+2 \\ \iff \quad & x^2-\frac{5x}{3}-4 \leq 0 \\ \iff \quad & 3x^2-5x-12 \leq 0 \end{aligned}$$

cuya solución en $\mathbb{R}$ es $[x_1,x_2]$, donde $x_{1,2}$ están dados por la fórmula

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot 3\cdot 12}}{6} \\ &= \frac{5 \pm 13}{6}, \end{aligned}$$

es decir $x_1 = -\frac{4}{3}$ y $x_2 = 3$ y

$$x \in \left[-\frac{4}{3},3\right]$$

La solución final de la inecuación es la intersección de los dos conjuntos anteriores, es decir

$$\begin{aligned} x &\in \left[(-\infty,0] \cup [\frac{1}{3},+\infty)\right] \cap \left[-\frac{4}{3},3\right] \\ &= [-\frac{4}{3},0] \cup [\frac{1}{3},3]. \end{aligned}$$

Solución Problema 2 parte (a.i) (1.5 puntos) La expresión $(x-1)^2(x+2)$ es positiva para todo $x>0$. Por lo tanto, para $x>0$ se tiene que

$$\begin{array}{rl} & (x-1)^2(x+2) \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(x^2-2x+1\right)(x+2) \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(x^3-2x^2+x\right)+\left(2x^2-4x+2\right) \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & x^3-3x+2 \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & x^3+2 \geq 3x \\ \Longleftrightarrow & x^2+\dfrac{2}{x} \geq 3. \end{array}$$

Solución Problema 2 parte (a.ii) (1.5 puntos) Sean $a, b>0$. usamos la desigualdad anterior con $x=a/b$ y obtenemos que

$$\begin{array}{rl} \Longleftrightarrow & \left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{2}{\left(\frac{a}{b}\right)} \geq 3 \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{2b}{a} \geq 3 \\ \Longleftrightarrow & a^3+2b^3 \geq 3ab^2 \end{array}$$

Solución Problema 2 parte (b.i) (1.5 puntos) La ecuación de la recta L es $y=m(x-a)$.

Para intersectar esta recta con la circunferencia se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & R^2 \\ y & = & m(x-a). \end{array}$$

Este sistema se resuelve reemplazando la segunda en la primera ecuación. De este modo se obtiene la ecuación para las abscisas de las intersecciones siguiente

$$x^2+m^2\left(x^2-2ax+a^2\right)=R^2,$$

es decir, reordenando,

$$(1+m^2)x^2-2am^2x+a^2m^2-R^2=0.$$

Esta ecuación cuadrática tiene 0, 1 o dos soluciones dependiendo si el discriminante es negativo, cero o positivo respectivamente. El discriminante es

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & 4a^2m^4-4(1+m^2)(a^2m^2-R^2) \\ & = & 4R^2-4(a^2-R^2)m^2 \end{array}$$

Este discriminante es negativo, cero o positivo cuando m^2 es mayor, igual o menor que $\frac{R^2}{(a^2-R^2)}$.

Con este modo, el conjunto $\mathcal{C} \cap L$ está formado por:

- 2 puntos cuando $m \in \left(-\frac{R}{\sqrt{a^2-R^2}}, \frac{R}{\sqrt{a^2-R^2}}\right)$,
- 1 punto cuando $m=\pm\frac{R}{\sqrt{a^2-R^2}}$,
- 0 puntos cuando $m=\left(-\infty,-\frac{R}{\sqrt{a^2-R^2}}\right) \cup\left(\frac{R}{\sqrt{a^2-R^2}},+\infty\right)$.

Solución Problema 2 parte (b.ii) (1.5 puntos) En el caso en que las soluciones son dos puntos, las abscisas de esos puntos son las soluciones de la cuadrática, es decir

$$x_{A,B} = \frac{2am^2 \pm 2\sqrt{R^2 + R^2m^2 - a^2m^2}}{2(1+m^2)}$$

por lo tanto

$$x_{A,B} - a = \frac{-a \pm \sqrt{R^2 + R^2m^2 - a^2m^2}}{1+m^2}$$

De este modo

$$\begin{aligned} (x_A - a)\,(x_B - a) &= \frac{-a + \sqrt{R^2 + R^2m^2 - a^2m^2}}{1+m^2} \cdot \frac{-a - \sqrt{R^2 + R^2m^2 - a^2m^2}}{1+m^2} \\ &= \frac{a^2 - R^2 - R^2m^2 + a^2m^2}{(1+m^2)^2} \\ &= \frac{a^2 - R^2}{1+m^2}. \end{aligned}$$

Solución Problema 3, parte (a) (2 puntos) El punto Q tiene coordenadas: $x_Q = -p$ (por estar en la directriz) y $y_Q = y_0$ (por estar sobre la horizontal que pasa por P), es decir

$$Q = (-p, y_0).$$

El trazo FP tiene pendiente $m = \frac{y_P - y_F}{x_P - x_F} = \frac{y_0}{x_0 - p}$.

La recta que pasa por Q y es paralela al trazo FP tiene por ecuación $y - y_0 = \frac{y_0}{x_0 - p}\left(x + p\right)$.

La intersección de esta recta con el eje OX (es decir el punto R) se encuentra en

$$y_R = 0, \qquad \text{y} \qquad x_R = -x_0. \qquad \text{es decir, } R = (-x_0, 0).$$

Solución Problema 3, parte (b) (2 puntos) La recta L_{RP} tiene por ecuación $y - y_R = \frac{y_P - y_R}{x_P - x_R}\left(x - x_R\right)$, es decir, $y = \frac{y_0}{2x_0}(x + x_0)$.

Intersectemos esta recta con la parábola $y^2 = 4px$. Se obtiene la ecuación

$$\frac{y_0^2}{4x_0^2}(x + x_0)^2 = 4px,$$

la cual, reordenando, se lleva a la forma

$$y_0^2 x^2 + 2x_0\left(y_0^2 - 8px_0\right)x + x_0^2 y_0^2 = 0.$$

El discriminante de esta cuadrática es

$$\begin{aligned} \Delta &= 4x_0^2\left(y_0^2 - 8px_0\right)^2 - 4x_0^2 y_0^4 \\ &= 64px_0^3\left(4px_0 - y_0^2\right). \end{aligned}$$

Aquí se aprecia que como el punto P pertenece a la parábola, satisface $y_0^2 = 4px_0$ entonces el discriminante anterior es nulo y por lo tanto la solución de la cuadrática es el punto P repetido. Esto significa que la recta es tangente a la parábola.

Solución Problema 3, parte (c) (2 puntos) La recta L_{RP} corta al eje OY en $B = (0, \frac{y_0}{2})$.

Por lo tanto, el trazo FB tiene pendiente $m_{FB} = \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} = \frac{y_0/2}{-p} = -\frac{y_0}{2p}$.

El trazo RP tiene pendiente $m_{RP} = \frac{y_P - y_R}{x_P - x_R} = \frac{y_0}{2x_0}$.

Multiplicando las dos pendientes se obtiene que

$$m_{FB} \cdot m_{RP} = -\frac{y_0}{2p} \cdot \frac{y_0}{2x_0} = -\frac{y_0^2}{4px_0} = -1.$$

En la última igualdad se ha usado que $P(x_0, y_0)$satisface la ecuación de la parábola.

Esto concluye la demostración de la perpendicularidad.