PAUTA CONTROL 2 MA12A 2000

Problema 1.

a. *(2.0 pts.) Sea L una recta no vertical de ecuación $y = mx + n$, sean A, B, C y D cuatro puntos de ella y a_1, b_1, c_1 y d_1 sus abscisas, respectivamente ($A = (a_1, a_2)$). Demostrar que $d(A, B) = d(C, D) \Leftrightarrow |a_1 - b_1| = |c_1 - d_1|$.*

Sol: Usando la ecuación de L tenemos que si $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ y $D = (d_1, d_2)$ entonces $a_2 = ma_1 + n$, $b_2 = mb_1 + n$, $c_2 = mc_1 + n$ y $d_2 = md_1 + n$. **0.5 pts.**

La distancia $d(A, B)$ satisface que $(d(A, B))^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$. Pero $(a_2 - b_2) = m(a_1 - b_1)$ por lo tanto $d(A, B) = |a_1 - b_1| \sqrt{1 + m^2}$. Del mismo modo $d(C, D) = |c_1 - d_1| \sqrt{1 + m^2}$.**1.0 pto.**

Como $\sqrt{1 + m^2} > 0$ se tiene que $d(A, B) = d(C, D) \Leftrightarrow |a_1 - b_1| \sqrt{1 + m^2} = |c_1 - d_1| \sqrt{1 + m^2} \Leftrightarrow$ $|a_1 - b_1| = |c_1 - d_1|$ **0.5 pts**

b.1 *(1.0 pto.) Determinar para qué valores de m, un recta L con pendiente m que pasa por el punto $(-1, 0)$ intersecta a la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$.*

Sol: Los puntos de intersección de L con la hipérbola son las soluciones del sistema $\begin{array}{rl} y &= m(x+1) \\ x^2 - y^2 &= 1 \end{array}$ **0.25.** Reemplazando la primera ecuación en la segunda se obtiene la ecuación $x^2 - m^2(x+1)^2 = 1$. Esta equivale a $x^2 - 1 - m^2(x+1)^2 = 0$ que a su vez equivale a
$(x+1)(x - 1 - m^2(x+1)) = 0$ **0.25 pts.**. Sus soluciones son $x_1 = -1$ y x_2 tal que $x_2(1 - m^2) = 1 + m^2$. Para que la segunda solución pertenezca a la rama derecha de la hipérbola se debe tener que $x_2 \geq 1$ **0.25pts.** Esto se tiene si y sólo si $1 - m^2 > 0$. Por lo tanto, la condición para m es que $|m| < 1$ **0.25 pts**.

b.2 *(1.0 pto.) Deducir que la intersección ocurre en el punto $P = \left(\frac{1+m^2}{1-m^2}, \frac{2m}{1-m^2}\right)$.*

Sol: El punto P de la intersección está dado por $(x_2, m(x_2 + 1)) = \left(\frac{1+m^2}{1-m^2}, \frac{2m}{1-m^2}\right)$ **1.0 pto.**

c *Sea L la recta de ecuación $y = m(x + 1)$, con $m \geq 0$ y tal que L intersecte a la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en un punto P.*

c.1 (1.0 pto.) *Determinar el punto R de la intersección de L con la recta de ecuación $y = -x$ y el punto S la intersección de L con la recta de ecuación $y = x$.*

Sol: Para que L y la rama derecha de la hipérbola se intersecten $|m| < 1$. Entonces, para $0 \leq m < 1$, el punto R es la solución del sistema $\begin{array}{rcl} y &=& m(x+1) \\ y &=& -x \end{array}$ cuya solución en x es $\frac{-m}{1+m}$de modo que $R = \left(\frac{-m}{1+m}, \frac{m}{1+m}\right)$ **0.5 pts.** Por otra parte S es la solución del sistema $\begin{array}{rcl} y &=& m(x+1) \\ y &=& -x \end{array}$ cuya solución en x es $\frac{-m}{m-1} = \frac{m}{1-m}$. Entonces, $S = \left(\frac{m}{1-m}, \frac{m}{1-m}\right)$ **0.5 pts.**

c.2. (1.0 pto.) *Demostrar que $d((-1, 0), R) = d(S, P)$.*

Se tiene que $|-1 - R_1| = \left|-1 + \frac{m}{1+m}\right| = \frac{1}{1+m}$**0.5 pts.** y que $|S_1 - P_1| = \left|\frac{m}{1-m} - \frac{1+m^2}{1-m^2}\right| = \left|\frac{m(1+m) - (1+m^2)}{(1-m)(1+m)}\right| = \frac{1}{1+m}$ **0.3 pts**. Aplicando el resultado de la primera parte concluimos que $d((-1, 0), R) = d(S, P)$ **0.2 pts.**

Problema 2. *Para la asignación* $f(x) = sen\left(\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right)$ *se pide determinar*

a. *(1.0 pto.) Dominio.*

<u>**Sol:**</u> La función sen (y) tiene dominio el conjunto $\mathbb{R}$ **0.2 pts.**, la función $\sqrt{z}$ tiene domino el intervalo $[0, +\infty)$ **0.3 pts.** y el cuociente $\frac{a}{b}$está definido sólo para $b \neq 0$ **0.3 pts.**. Entonces el dominio de f son los reales que satisfacen $\pi^2 - x^2 > 0$, es decir, $|x| < \pi$ **0.2 pts.**.

b. *(1.0 pto.) Paridad.*

<u>**Sol:**</u> Para $x \in \text{dom}(f)$ se tiene que $-x \in \text{dom}(f)$ **0.2 pts.**. Además, la función y^2 es par y la función sen (y) es impar **0.3 pts.**. Por lo tanto $f(-x) = \text{sen}\left(\frac{\pi(-x)}{\sqrt{\pi^2-(-x)^2}}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}\right) = -f(x)$ **0.4 pts.** por lo que f es impar **0.1 pto.**.

c. *(1.0 pto.) Acotamiento.*

<u>**Sol:**</u> Como $|\text{sen}(y)| \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$ **0.4 pts.** tenemos que $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in (-\pi, \pi)$ **0.4pts.** . Luego f está acotada inferiormente por -1 **0.1 pto.** y superiormente por 1 **0.1 pto.**

d. *(1.0 pto.) Demostrar que el conjunto de todos los ceros de f está dado por* $\left\{\frac{\pi k}{\sqrt{1+k^2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

<u>Sol</u>: $x \in (-\pi, \pi)$ es un cero de f si y sólo si sen $\left(\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}\right) = 0$. Esto equivale a que exista un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2-x^2}} = k\pi$ **0.3 pts.**. Para $x > 0$, lo anterior equivale a $x^2 = k^2(\pi^2 - x^2)$, es decir, $x = \frac{|k|\pi}{\sqrt{1+k^2}}$. Como $\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} < 1$, se tiene que $x \in (-\pi, \pi)$ y entonces x es un cero de f **0.3 pts.**. Con esto hemos deducido que el conjunto de los ceros de f que son positivos o nulos es $\left\{\frac{|k|\pi}{\sqrt{1+k^2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ **0.2 pts.**. Como la función es impar, el conjunto de ceros que son negativos o nulos está dado por $\left\{\frac{-|k|\pi}{\sqrt{1+k^2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Finalmente, el conjunto de ceros es $\left\{\frac{k\pi}{\sqrt{1+k^2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ **0.2 pts**.

e. *(1.0 pto.) Probar, usando la definición de convergencia, que la sucesión* $x_k = \left(\frac{\pi k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2$ *converge a* π^2.

La diferencia entre x_k y π^2 está dada por $\frac{\pi^2 k^2}{(1+k^2)} - \pi^2 = \frac{-\pi^2}{1+k^2}$ **0.3 pts.**. Dado $\epsilon > 0$ sea $k_0 = \left[\frac{\pi}{\sqrt{\epsilon}}\right] + 1$ **0.3 pts.**. Entonces, para $k \geq k_0$ se tiene que $k > \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon}}$lo que equivale a $k^2 > \frac{\pi^2}{\epsilon}$. Luego, $1+k^2 > k^2 > \frac{\pi^2}{\epsilon}$ por lo que $|x_k - \pi^2| = \frac{\pi^2}{1+k^2} < \epsilon$ **0.3 pts.**. Lo que prueba que (x_k) converge a π^2 **0.1 pto.**.

f. *(1.0 pto.) Usando sólo lo anterior bosquejar un gráfico de f.*

<u>Sol</u>: El gráfico de ser el de una función que está definida en $(-\pi\, \pi)$ que su imagen está en $(-1, 1)$, que es impar y que cerca de $-\pi$ y de π oscila fuertemente.

Problema 3.

a. *(2.0 pts.) Sea* (a_n) *una sucesión que converge a 1 y* (b_n) *una sucesión tal que* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n \leq 1$. *Usando la definición de convergencia, demuestre que* (b_n) *converge a 1.*

Sol: Como (a_n) converge a 1, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|1 - a_n| < \epsilon$ **0.5 pts.**. Además sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 - a_n \geq 1 - b_n \geq 0$ **0.5 pts.**. Entonces, para $n \geq n_0$ tenemos que $|1 - b_n| = 1 - b_n \leq 1 - a_n = |1 - a_n| < \epsilon$ **0.5 pts.**. Resumiendo, para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|1 - b_n| < \epsilon$ que es la definición de que la sucesión (b_n) converge a 1 **0.5 pts.**.

b. *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función estrictamente creciente.*

b.1 *(1.0 pto.) Usando inducción, demostrar que,* $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n$.

Sol: Como $f(0) \in \mathbb{N}$ tenemos que $f(0) \geq 0$ **0.2 pts.** Supongamos que $f(n) \geq n$ y probemos que $f(n+1) \geq n+1$ **0.2 pts.**. Como f es estrictamente creciente, $f(n+1) > f(n)$ **0.2 pts.**. Entonces, dada nuestra hipótesis de inducción $f(n+1) > n$ **0.2 pts.** Siendo $f(n+1)$ un número natural concluimos que $f(n+1) \geq n+1$ **0.2 pts.**.

b.2 *(1.0 pto.) Usando la definición de convergencia, demostrar que la sucesión* $\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ *converge a cero.*

Sol: Dado $\epsilon > 0$ escogemos $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ **0.3 pts.** de modo que para $n \geq n_0$ tenemos que $n > \frac{1}{\epsilon}$**0.2 pts.**. Por la parte anterior sabemos que para $n \geq n_0$ se tiene que $f(n) > \frac{1}{\epsilon}$ **0.3 pts.**. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ tal que para $n \geq n_0$, $\frac{1}{f(n)} < \epsilon$ **0.2 pts.**.
Obs. Notar que como f satisface $f(n) \geq n$, en particular se cumple que $f(n) > 0$ para todo $n \geq 1$ y entonces $\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ define una sucesión.

c. *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *inyectiva.*

c.1 *(1.0 pto.) Demostrar que,* $\forall M \in \mathbb{R}$, *el conjunto* $\{n : f(n) \leq M\}$ *es finito.*

Sol: El conjunto $A = \{n : f(n) \leq M\}$ es la pre-imagen por f del conjunto $B = \{m : m \leq M\}$, es decir $A = f^{-1}(B)$ **0.5 pts.**. Siendo f inyectiva y B finito, se tiene que A también lo es **0.5 pts.**.

c.2 *(1.0 pto.) Usando la definición de convergencia, demostrar que la sucesión* $\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ *converge a cero.*

Sol: Dado $\epsilon > 0$ podemos definir $M = \frac{1}{\epsilon}$ **0.4 pts.** y por lo anterior sabemos que $\{n : f(n) \leq M\}$ es finito, es decir, existe un n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ se cumple que $f(n) > M$ **0.3 pts.**. Pero $f(n) > M \Leftrightarrow \frac{1}{f(n)} < \epsilon$ **0.2 pts.**, es decir hemos demostrado que se satisface la definición de convergencia a cero para $\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ **0.1 pts.**.

Ind: Observe que $\{n : f(n) \leq M\}$ *es finito si y sólo si* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ f(n) > M$.