Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 17 de Mayo del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

PAUTA CONTROL 2

MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

(a) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x + \beta & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

(a.1) (1 pto.) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$.
Sol.:
f es epiyectiva $\overset{(0.3\text{ ptos.})}{\Longleftrightarrow}$ $Im(f) = \mathbb{R}$. En este caso, $Im(f) \overset{(0.4\text{ ptos.})}{=} (-\infty, \beta] \cup [\alpha, \infty)$, que es igual a todo $\mathbb{R}$ $\overset{(0.3\text{ ptos.})}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha \leq \beta$.

(a.2) (1 pto.) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.
Sol.:
f es inyectiva $\overset{(0.3\text{ ptos.})}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Supongamos que f no es inyectiva, entonces necesariamente $\exists y < 0 \leq x$ tales $y + \beta = x^2 + \alpha$ (0.2 ptos.). Luego, $\beta > y + \beta = x^2 + \alpha \geq \alpha$ entonces $\beta > \alpha$ (0.2 ptos.). Por otra parte, si $\alpha \geq \beta$ entonces la función es estrictamente creciente (0.2 ptos.) y en consecuencia es inyectiva (0.2 ptos.).

(a.3) (1 pto.) ¿Cuál es el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 |$ f es biyectiva$\}$?
Sol.:
f es biyectiva $\overset{(0.3\text{ ptos.})}{\Longleftrightarrow}$ f es epiyectiva e inyectiva $\overset{(0.3\text{ ptos.})}{\Longleftrightarrow}$ $\beta = \alpha$ gracias a (a.1) y (a.2). Luego $B \overset{(0.4\text{ ptos.})}{=} \{(\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2 | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(b) Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(b.1) (1.5 ptos.) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq |x|$.
Sol.:
Si $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |g(x)| = |x|$ (0.7 ptos.).
Si $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow |g(x)| = 0 \leq |x|$ (0.8 ptos.).

(b.2) (1.5 ptos.) Sea (u_n) una sucesión convergente a 0. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = 0$.
Sol.:
Tenemos que $u_n \to 0$ $\overset{(0.3\text{ ptos.})}{\Longleftrightarrow}$ $|u_n| \to 0$. De (b.1) se tiene que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |g(u_n)| \leq |u_n|$ (0.3 ptos.) y por el teorema del Sandwich deducimos que $|g(u_n)| \to 0$ (0.9 ptos.). Luego $g(u_n) \to 0$.

Problema 2.

(a) (3.0 ptos.) Considere una pirámide regular (caras laterales iguales) de vértice V y que tiene por base un cuadrado $ABCD$ (ver fig. 1). Las caras laterales son triángulos isósceles congruentes de ángulo basal θ. El ángulo entre una cara lateral y la base es ϕ. Se pide calcular $cos\phi$ en función de θ. Indicación: Determine $\overline{OM}$ y $\overline{VM}$ en términos de $\overline{AM}$ y θ, donde M es el punto medio del segmento AB.
Sol.:

- (1.0 pto.) Cálculo de $\overline{OM}$: puesto que $ABCD$ es un cuadrado y O es su centro, se tiene $\overline{OM} = \overline{AM}$.
- (1.0 pto.) Cálculo de $\overline{VM}$: en el triángulo rectángulo VMA se tiene $tan\theta = \frac{\overline{VM}}{\overline{AM}}$. Luego, $\overline{VM} = \overline{AM}tan\theta$.
- (1.0 pto.) Cálculo de $cos\phi$: en el triángulo rectángulo VOM se tiene

$$cos\phi = \frac{\overline{OM}}{\overline{VM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}tan\theta} = \frac{1}{tan\theta}.$$

(b) (3.0 ptos.) En un triángulo ABC (ver fig. 2) se tiene: $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{sen(\alpha+\beta)}{sen(\alpha-\beta)}$. Demuestre que en tal caso el triángulo necesariamente es rectángulo.

Sol.:

Hay al menos dos estrategias para resolver el problema: la primera consiste en expresar todas las variables en términos de los largos de los lados a, b y c; la segunda consiste en expresar todas las variables en términos de los senos y cosenos de los ángulos α, β y γ.

(a) Veamos la primera de ellas. (0.5 pts. por definir una estrategia) Aplicando el Teorema del Seno tenemos que

$$\frac{\text{sen}\,(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}\,(\beta)}{b}$$

lo que aplicado al lado derecho de la hipótesis nos da (1.0 pto. por Aplicar Teorema del Seno y simplificar)

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,(\alpha-\beta)} &= \frac{\text{sen}\,(\alpha)\cos\,(\beta)+\text{sen}\,(\beta)\cos\,(\alpha)}{\text{sen}\,(\alpha)\cos\,(\beta)-\text{sen}\,(\beta)\cos\,(\alpha)} && (1)\\
&= \frac{\frac{a}{b}\text{sen}\,(\beta)\cos\,(\beta)+\text{sen}\,(\beta)\cos\,(\alpha)}{\frac{a}{b}\text{sen}\,(\beta)\cos\,(\beta)-\text{sen}\,(\beta)\cos\,(\alpha)} && (2)\\
&= \frac{a\cos\,(\beta)+b\cos\,(\alpha)}{a\cos\,(\beta)-b\cos\,(\alpha)} && (3)
\end{aligned}$$

donde la última ecuación se obtiene multiplicando numerador y denominador por $\frac{b}{\text{sen}(\beta)}$ lo que es posible pues $\beta \in (0,\pi)$. Ahora establecemos las relaciones entre lados y cosenos de ángulos aplicando el Teorema del Coseno (1.0 pto. por aplicar Teorema del Coseno y eliminar los cosenos)

$$\begin{aligned}
a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\,(\alpha) &\Rightarrow -a^2+b^2+c^2 = 2bc\cos\,(\alpha)\\
b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\,(\beta) &\Rightarrow -b^2+a^2+c^2 = 2ac\cos\,(\beta)
\end{aligned}$$

Multiplicando numerador y denominador en 3 por $2c$ y utilizando las implicancias anteriores obtenemos

$$\frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,(\alpha-\beta)} = \frac{2ac\cos\,(\beta)+2bc\cos\,(\alpha)}{2ac\cos\,(\beta)-2bc\cos\,(\alpha)} = \frac{a^2+c^2-b^2-a^2+b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+a^2-b^2-c^2} = \frac{c^2}{a^2-b^2}$$

Po la hipótesis sabemos que

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2}{a^2-b^2}$$

luego $a^2+b^2=c^2$. (0.5 pts. por argumentar que el triángulo es rectángulo). Una aplicación del Teorema del Coseno nos dice que

$$2ab\cos(\gamma)=0$$

con lo que $\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Pero γ es un ángulo interior de un triángulo, luego $\gamma\in(0,\pi)$ con lo que $\gamma=\frac{\pi}{2}$, es decir el triángulo es rectángulo.

(b) La segunda alternativa es aplicar Teorema del seno (0.5 pts. por definir la estrategia)

$$\begin{aligned} a^2=\left(\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right)^2\operatorname{sen}^2(\alpha) &= K\operatorname{sen}^2(\alpha)\\ b^2=\left(\frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}\right)^2\operatorname{sen}^2(\beta) &= K\operatorname{sen}^2(\beta)\end{aligned}$$

donde $K=\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}=\frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$. Con esto (1.0 pto. por aplicar Teorema del seno y eliminar a^2 y b^2)

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{K\operatorname{sen}^2(\alpha)+K\operatorname{sen}^2(\beta)}{K\operatorname{sen}^2(\alpha)-K\operatorname{sen}^2(\beta)}=\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\beta)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\beta)}$$

y la hipótesis se escribe para $\alpha\neq\beta$ como

$$\left(\operatorname{sen}^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\beta)\right)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\left(\operatorname{sen}^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\beta)\right)\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

Aplicando la fórmula de la suma de ángulos para sen se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{sen}^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\beta)\right)\left(\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)\right) &=\\ \left(\operatorname{sen}^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\beta)\right)\left(\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)\right)\end{aligned}$$

Multiplicando y cancelando los términos que aparecen en ambos lados de ésta queda

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}^2(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) &= 2\operatorname{sen}^2(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)\\ \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\left(2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)-2\operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta)\right) &= 0\\ \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\left(\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\beta)\right) &= 0\end{aligned}$$

(0.5 pts. por reducir el problema a una ecuación trigonométrica) como $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, se tiene que $\operatorname{sen}(\alpha)\neq 0$, $\operatorname{sen}(\beta)\neq 0$ luego $\operatorname{sen}(2\alpha)=\operatorname{sen}(2\beta)$. Así, $2\alpha=2\beta+2k\pi$ o $2\alpha=(\pi-2\beta)+2k\pi$. En el primer caso $\alpha=\beta+k\pi$ lo que sólo es posible para $k=0$. (0.5 pts. por descartar la solución $\alpha=\beta$.) Entonces, $\alpha=\beta\in(0,\pi)$ pero en esta situación el triángulo sería isósceles con lo que se tendría que $a^2-b^2=0$, lo que no es posible dada la identidad que tenemos como hipótesis. El segundo caso corresponde a $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi$. (0.5 pts. por obtener la solución $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ y la conclusión $\gamma=\frac{\pi}{2}$.) Pero $\alpha+\beta\in(0,\pi)$ luego $k=0$ y $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Finalmente, $\gamma=\pi-\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ y el triángulo es rectángulo.

Problema 3.

(a) (3 ptos.) Pruebe que si (s_n) es una sucesión que satisface $\forall n \in \mathbb{N}$ $|s_n - s_{n+2}| \geq 1/2$ entonces (s_n) <u>no</u> es convergente.

<u>Sol.</u>:

La demostración puede hacerse por contradicción. Si se supone que (s_n) es convergente a un cierto real $l \in \mathbb{R}$ entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|s_n - l| \leq \varepsilon$ (0.5 ptos.). Por cierto, si $n \geq n_0$ entonces $n + 2 \geq n_0$ y en consecuencia también se cumple que $\forall n \geq n_0$, $|s_{n+2} - l| \geq \varepsilon$ (0.5 ptos.). Usando la relación: $|s_{n+2} - s_n| \leq |s_{n+2} - l| + |l - s_n|$ (1.0 pto.), se obtiene que $\forall n \geq n_0$, $|s_{n+2} - s_n| \leq 2\varepsilon$. Como el resultado anterior es cierto para todo $\varepsilon > 0$, la contradicción se obtiene tomando el caso particular $\varepsilon = 1/5$ (en realidad, cualquier $\varepsilon < 1/4$ es apropiado). Con esto, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|s_{n+2} - s_n| \leq 2/5$, pero según el dato, $|s_n - s_{n+2}| \geq 1/2$. Por lo tanto, llevando el razonamiento hasta su última consecuencia se tendría que $1/2 \leq 2/5$, lo cual es por cierto una contradicción con los axiomas de números reales (1.0 pto.).

(b) (1.5 ptos.) Sea (u_n) una sucesión que converge a $1/2$. Pruebe que la sucesión (v_n) definida por $v_n = [u_n]$ satisface $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

<u>Sol.</u>:

Tenemos $u_n \to 1/2$, es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $1/2 - \varepsilon \leq u_n \leq 1/2 + \varepsilon$ (0.5 ptos.). En particular, tomando $\varepsilon = 1/4$ en el dato, se tiene que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $1/4 \leq u_n \leq 3/4$ (0.5 ptos.), de donde tomando parte entera $\forall n \geq n_0$, $v_n = [u_n] = 0$, es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geq n_0$, $|v_n - 0| \leq \varepsilon$, o sea $v_n \to 0$ (0.5 ptos.).

(c) (1.5 ptos.) Sean (u_n) una sucesión creciente y (v_n) una sucesión decreciente tales que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$. Pruebe que (u_n) y (v_n) convergen y que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

<u>Sol.</u>:

Para probar que ambas sucesiones convergen, basta con demostrar que son acotadas. Como $u_n - v_n \to 0$, entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $-\varepsilon \leq u_n - v_n \leq \varepsilon$. En particular, tomando $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n + 1$ (hasta aquí 0.5 ptos.). Pero por monotonía, $v_n \leq v_0$ y $u_n \geq u_0$. Entonces $\forall n \geq n_0$, $u_0 \leq u_n \leq v_n + 1 \leq v_0 + 1$ (de hecho, por monotonía se deduce que las desigualdades son válidas $\forall n \in \mathbb{N}$, pero esto no es necesario para tener un 7.0 en esta pregunta). Por lo tanto, (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas (hasta aquí, otros 0.5 ptos.). Usando el Teorema de las sucesiones monótonas acotadas, sabemos que $\exists l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ y $\exists l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Usando el Teorema de Algebra de sucesiones, $l_1 - l_2 = \lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$, es decir, $l_1 = l_2$. En conclusión, (u_n) y (v_n) convergen al mismo límite (0.5 ptos.).