Pauta Control #2 MA12A Cálculo

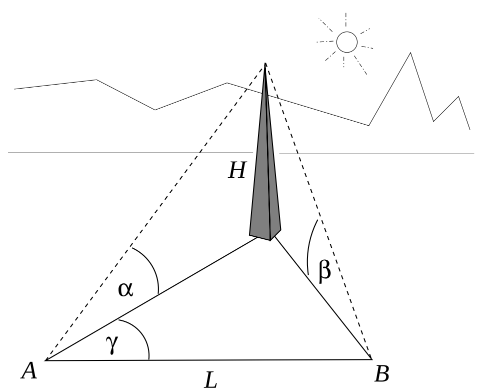
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

Puntuación: P1.- (i)3, (ii)3, P2.- (i)2, (ii)2, (iii)1, (iv)1, P3.- (i)2, (ii)1, (iii)1.5, (iv)1.5.

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** La altura H de la torre de la figura es desconocida. Se conocen los ángulos de elevación α y β medidos desde dos puntos A y B del suelo, separados por una distancia $L > 0$ y formando con la base de la torre un ángulo γ. Sabiendo que la torre es vertical respecto del suelo, calcule H en términos de L, α, β, γ en los casos $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ y $\alpha < \beta$. (Nota: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \gamma < \pi$).



(ii) Resuelva la ecuación: $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.
Indicación: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Pauta.- **(i)** Sea el punto C la base de la torre y sean l_1 y l_2 las medidas de los segmentos AC y BC respectivamente, entonces: **[0/0.25/0.5pto]**.

$$l_1 = \frac{H}{\tan\alpha} \qquad l_2 = \frac{H}{\tan\beta}.$$

Por otro lado, el triangulo ABC se resuelve con el Teorema del coseno: **[0/0.5pto]**

$$l_2^2 = l_1^2 + L^2 - 2l_1\, L\cos\gamma.$$

De las ecuaciones anteriores se encuentra la siguiente ecuación para H: **[0/0.25/0.5pto]**

$$\left(\frac{1}{\tan^2\beta} - \frac{1}{\tan^2\alpha}\right) H^2 + \frac{2L\cos\gamma}{\tan\alpha} H - L^2 = 0.$$

Si $\alpha = \beta$ (claramente en este caso $\cos\gamma \neq 0$ sino se tendría $L = 0$) entonces **[0/0.5pto]**

$$H = \frac{L\tan\alpha}{2\cos\gamma}.$$

Si $\alpha > \beta$, entonces: **[0/0.25/0.5pto]**

$$H = \frac{-\frac{2L\cos\gamma}{\tan\alpha} \pm \sqrt{\frac{4L^2\cos^2\gamma}{\tan^2\alpha} + 4L^2(\frac{1}{\tan^2\beta} - \frac{1}{\tan^2\alpha})}}{2(\frac{1}{\tan^2\beta} - \frac{1}{\tan^2\alpha})}$$

Para elegir el buen signo de la raíz, notemos que como $\alpha > \beta$, entonces $\tan\alpha > \tan\beta$ (función tangente creciente en el intervalo $(0,\pi/2)$) y entonces $1/\tan^2\alpha < 1/\tan^2\beta$ de donde elegimos signo $+$ de modo que $H > 0$. **[0/0.25/0.5pto]**.

(ii) Utilizando la indicación y el hecho de que la función seno es impar: **[0/0.25/0.5pto]**

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) + \sin^3(x) &= \cos^3(x) - \sin^3(-x) \\
&= (\cos(x) - \sin(-x))(\cos^2(x) + \cos(x)\sin(-x) + \sin^2(-x)) \\
&= (\cos(x) + \sin(x))(\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)) \\
&= (\cos(x) + \sin(x))(1 - \cos(x)\sin(x))
\end{aligned}$$

por otro lado el lado derecho es **[0/0.25/0.5pto]**

$$1 - \frac{1}{2}\sin(2x) = 1 - \cos(x)\sin(x).$$

La solución de la ecuación original resulta de la unión de las soluciones de las dos ecuaciones siguientes: **[0/0.25/0.5pto]**

$$\sin(x) + \cos(x) = 1 \quad , \quad 1 - \sin(x)\cos(x) = 0.$$

Sea $c = \cos(x)$ y $s = \sin(x)$, entonces $s + c = 1$ esto es $(s+c)^2 = 1$, junto con $s^2 + c^2 = 1$ implica $sc = 0$ de donde $c = 0$ o $s = 0$ esto es $x = \pi/2 + k\pi$ o $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En realidad con este método resolvimos $s + c = \pm 1$, por lo que restringiendo la solución obtenemos para la primera ecuación $x = \pi/2 + 2k\pi$ o $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **[0/0.25/0.5pto]**. En seguida $1 - cs = 0$ es $cs = 1$ y esto junto con $s^2 + c^2 = 1$ da $s^2(1 - s^2) = 1$. Si $p = s^2$ entonces $p^2 - p + 1 = 0$ lo que no tiene solución real, esto es, la segunda ecuación no tiene solución **[0/0.25/0.5pto]**. Finalmente la solución es $x = \pi/2 + 2k\pi$ o $x = 2k\pi$. **[0/0.25/0.5pto]**

P2.- Estudie completamente la función

$$f(x) = |\sqrt{|x|} - x|.$$

Para ello:

(i) Encuentre dominio, ceros. Estudie epiyectividad, inyectividad. Demuestre que su recorrido es el conjunto $\{y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$.

(ii) Analice el crecimiento de la función **sin módulo** $\sqrt{|x|} - x$ para $x > 1/4$, $0 < x < 1/4$ y $x < 0$. Indicación: note que si $x > y > 1/4$ entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 1$.

(iii) Estudie el crecimiento de $|\sqrt{|x|} - x|$ analizando los signos de $\sqrt{|x|} - x$.

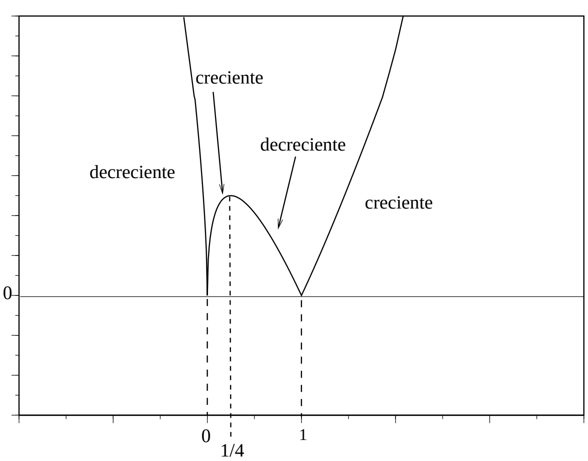
(iv) Haga un gráfico aproximado de f que resuma el análisis precedente.

Pauta.- **(i)** El dominio es todo $I\!R$ **[0/0.25pto]**, los ceros son las soluciones de $\sqrt{|x|} = x$, esto es $x = 0$ y $x = 1$ **[0/0.25pto]**. No es epiyectiva pues los $y < 0$ no tienen preimagen **[0/0.25pto]**. No es inyectiva pues tiene dos ceros **[0/0.25pto]**. Si $y \geq 0$ entonces buscamos una preimagen x tal que $f(x) = y$, por ejemplo busquemos un $x \geq 1$, como $\sqrt{|x|} - x \leq 0$ luego debemos resolver $\sqrt{x} - x = -y$ esto es $\sqrt{x} = x - y$ o bien $x = x^2 - 2xy + y^2$, que es la ecuación $x^2 - (2y+1)x + y^2 = 0$, cuya solución existe en los reales si $(2y+1)^2 - 4y^2 \geq 0$ lo cual es cierto pues $4y + 1 > 0$ **[0/0.5/1pto]**.

(ii) Crecimiento de $\sqrt{|x|} - x$. Si $x > y > 1/4$ entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 1$, multiplicamos por $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$ y queda $x - y > \sqrt{x} - \sqrt{y}$ de donde $\sqrt{|x|} - x < \sqrt{|y|} - y$ por lo que $\sqrt{|x|} - x$ es decreciente si $x > 1/4$ **[0/0.5/1pto]**. Si ahora $0 < y < x < 1/4$ entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} < 1$, multiplicamos por $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$ y queda $x - y < \sqrt{x} - \sqrt{y}$ de donde $\sqrt{|x|} - x > \sqrt{|y|} - y$ por lo que $\sqrt{|x|} - x$ es creciente si $0 < x < 1/4$ **[0/0.25/0.5pto]**. Finalmente, si $x < 0$, entonces $\sqrt{|x|} - x = \sqrt{|x|} + |x|$ y es decreciente por ser suma de dos funciones decrecientes para $x > 0$ **[0/0.25/0.5pto]**.

(iii) Signos de $\sqrt{|x|} - x$. Si $0 < x < 1$ entonces $\sqrt{|x|} - x > 0$, si $x < 0$ entonces $\sqrt{|x|} - x > 0$ y si $x > 1$ entonces $\sqrt{|x|} - x < 0$ **[0/0.25/0.5pto]**. Del punto **(i)** se deduce que el crecimiento de $|\sqrt{|x|} - x|$ se invierte si $x > 1$, esto es decreciente si $x < 0$, creciente si $0 < x < 1/4$, decreciente si $1/4 < x < 1$ y creciente si $x > 1$ **[0/0.25/0.5pto]**.

(iv) La información de los puntos precedentes se puede resumir en el gráfico siguiente: **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]**



P3.- Para $a > 0$, definimos la sucesión $s_n = \dfrac{1}{\sqrt[n^2]{a}}$, $n \in I\!N$. (Nota: $\sqrt[n^2]{a} = r \Leftrightarrow a = r^{n^2}$).

(i) Si $0 < a < 1$ pruebe que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
Indicación: defina la sucesión $h_n = s_n - 1$ y muestre que $h_n \to 0$ utilizando que $(1+h)^k \geq 1 + kh$, $\forall h > 0$, $\forall k \in I\!N$ y un teorema de comparación (sandwich).

(ii) Si $a > 1$ o $a = 1$ pruebe que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

(iii) Si $a_n \to L > 0$, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{a_n}} = 1.$$

(iv) Si $a > b > 0$ calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n + b^n}}.$$

Indicación: puede usar que $\sqrt[n]{a} \to 1$ si $a > 0$.

Pauta.- **(i)** Si $a < 1$ entonces $\sqrt[n^2]{a} < 1$ y luego $\frac{1}{\sqrt[n^2]{a}} > 1$ por lo que $h_n = s_n - 1 > 0$. Como $\frac{1}{a} = (1+h_n)^{n^2} \geq 1 + n^2 h_n$, entonces $0 < h_n < \frac{1/a-1}{n^2}$. Usando el teorema de comparación (sandwich) se deduce que $h_n \to 0$ de donde por álgebra de límites $s_n = h_n + 1 \to 1$. **[2pto]**

(ii) Si $a > 1$ entonces $0 < a^{-1} < 1$, de donde usando la parte **(i)** y álgebra de límites se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n^2]{a^{-1}}}} = 1.$$

Si $a = 1$ el resultado es evidente pues $\sqrt[n^2]{a} = 1$. **[1pto]**

(iii) Como $a_n \to L > 0$, existe $n_0 \in I\!N$ tal que $\forall n \geq n_0$ $0 < \frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2}$ por lo que $0 < \sqrt[n^2]{\frac{L}{2}} < \sqrt[n^2]{a_n} < \sqrt[n^2]{\frac{3L}{2}}$. Usando las partes **(i)-(ii)** y comparación (sandwich) se obtiene $\sqrt[n^2]{a_n} \to 1$. **[1.5pto]**

(iv) Claramente:

$$\frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n + b^n}} = \frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n}\sqrt[n^2]{1 + (\frac{b}{a})^n}},$$

pero $(\frac{b}{a})^n \to 0$ pues $0 < \frac{b}{a} < 1$ y $\sqrt[n^2]{a^n} = \sqrt[n]{a} \to 1$. Usando **(iii)** y álgebra de límites se deduce el resultado. **[1.5pto]**

Nota: los puntajes indicados **[0/0.5/1pto]** significan que en lo posible la puntuación tomará solamente esos valores.

Atte, el Coordinador.