Pauta Control #2 MA12A Cálculo

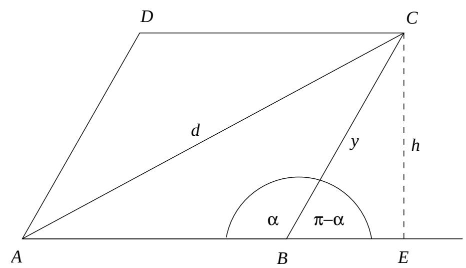
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 13/06 18:00 y 19:00). Esta se puede obtener vía `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.-

Pauta.- (ai) La superficie es $S = h \cdot x$ donde $h = EC$, $EC \perp AE$ (ver figura). Pero $h/y = \sin(\pi - \alpha)$ de donde $h = y\sin(\pi-\alpha) = y\sin\alpha$ (visto en clases). Luego $S = xy\sin\alpha$.



(aii) Por un lado el perímetro es $2(x+y)$, es decir

$$2p = 2(x+y) \Rightarrow p = x+y \tag{1}$$

y por el teorema del coseno

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha. \tag{2}$$

Elevando la expresión (1) al cuadrado se obtiene $p^2 = x^2+y^2+2xy$ y restando de (2) se encuentra

$$p^2 - d^2 = 2xy + 2xy\cos(\alpha) = 2xy(1+\cos\alpha).$$

Luego $xy = \dfrac{p^2-d^2}{2(1+\cos\alpha)}$. Reemplazando en la fórmula para S tenemos

$$S = \frac{p^2-d^2}{2}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{3}$$

Comprobemos que $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan(\alpha/2)$ (esta es la identidad no trivial a la que se refiere en el enunciado):

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} &= \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{1+\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)} \\
&= \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\cos^2(\alpha/2)} \\
&= \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} \\
&= \tan(\alpha/2).
\end{aligned}$$

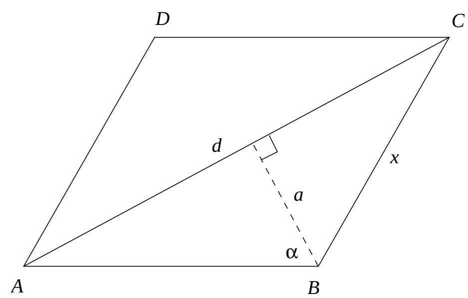
Por lo tanto $S = \dfrac{p^2 - d^2}{2} \tan(\alpha/2)$.

Nota: como $\alpha \in (0, \pi)$ $\cos(\alpha/2) \neq 0$.

(aiii) Suponemos $x = y$

Opción 1 Por el Teorema de Pitágoras $a^2 = x^2 - (d/2)^2$, donde a es la longitud de la altura en línea punteada (ver figura), pero $x = p/2$ de donde

$$a = \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - d^2}.$$



El área del triángulo ABC es

$$\frac{1}{2} d \cdot a = \frac{1}{4} d \sqrt{p^2 - d^2}$$

y por lo tanto el área del paralelógramo es

$$S = \frac{1}{2} d \sqrt{p^2 - d^2}.$$

Opción 2 Usando la fórmula (3) de la parte **(ii)**, debemos encontrar $\cos\alpha$ y $\sin\alpha$ en función de p y de d. Por el Teorema del coseno

$$d^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos\alpha \Rightarrow \frac{d^2}{2x^2} = 1 - \cos\alpha$$

pero $x = p/2$ de donde

$$1 - \cos\alpha = \frac{2d^2}{p^2} \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{2d^2}{p^2}.$$

Ahora necesitamos

$$\begin{aligned}
1 + \cos\alpha &= 2\left(1 - \frac{d^2}{p^2}\right) \\
\sin\alpha &= \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\
&= \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2d^2}{p^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4d^2}{p^2} - \frac{4d^4}{p^4}} \\
&= 2\frac{d}{p}\sqrt{1 - \frac{d^2}{p^2}}.
\end{aligned}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{p^2-d^2}{2}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\
&= \frac{p^2-d^2}{2}\frac{2\frac{d}{p}\sqrt{1-\frac{d^2}{p^2}}}{2\left(1-\frac{d^2}{p^2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}(p^2-d^2)\frac{dp\sqrt{1-\frac{d^2}{p^2}}}{p^2-d^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{p^2-d^2}.
\end{aligned}
$$

(b) Sea $a \in \mathbb{Z}$ y resolvamos $\sqrt{2}\cos x = a$. Si $a \geq 2$ entonces $\dfrac{a}{\sqrt{2}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$ por lo que no hay solución.

Similarmente, si $a \leq -2$ $\dfrac{a}{\sqrt{2}} < -1$ y tampoco hay solución.

Caso $a = 0$: $\sqrt{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

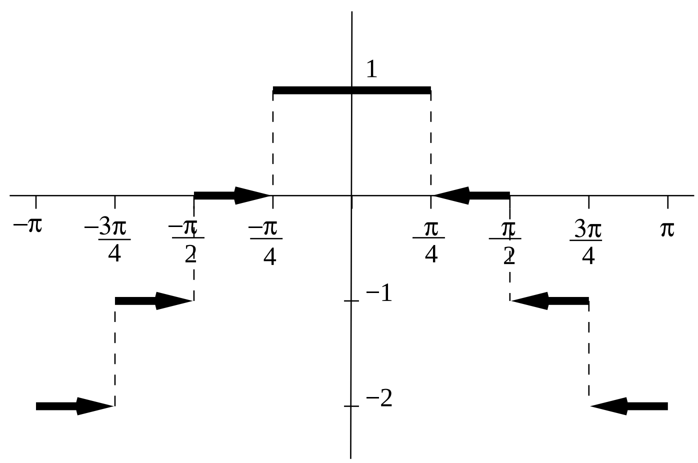
Caso $a = 1$: $\sqrt{2}\cos x = 1$ esto es $\cos x = 1/\sqrt{2}$. Una solución es $x = \pi/4$ y por simetría otra es $x = -\pi/4$, también son soluciones por periodicidad $x = \pi/4 + 2k\pi$ o $x = -\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Caso $a = -1$: $\sqrt{2}\cos x = -1$ esto es $\cos x = -1/\sqrt{2}$ cuya solución es $x = 5\pi/4 + 2k\pi$ o $x = 3\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Gráfico: f es periódica de periodo 2π:

$$f(2\pi + x) = [\sqrt{2}\cos(2\pi + x)] = [\sqrt{2}\cos(x)] = f(x),$$

luego basta bosquejar f en $[-\pi, \pi]$ o en $[0, 2\pi]$.



Puntuación:

$$
\textbf{(ai)}\ \ [\mathbf{0.5pto}]\left\{\begin{array}{cc}
h/y = \sin(\pi-\alpha) & [\mathbf{0.2pto}] \\
\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha & [\mathbf{0.2pto}] \\
\text{resto} & [\mathbf{0.1pto}]
\end{array}\right.
$$

$$
\textbf{(aii)}\ \ [\mathbf{1.5pto}]\left\{\begin{array}{cc}
\text{teo del coseno} & [\mathbf{0.3pto}] \\
\text{llegar a (3)} & [\mathbf{0.6pto}] \\
\text{identidad} & [\mathbf{0.6pto}]
\end{array}\right.
$$

(aiii) **[1pto]**

$$\text{Opción 1}\left\{\begin{array}{ll} \text{encontrar } a & \textbf{[0.5pto]} \\ S = \ldots & \textbf{[0.5pto]} \end{array}\right. \quad \text{Opción 2}\left\{\begin{array}{ll} \text{despejar } \cos\alpha & \textbf{[0.5pto]} \\ \text{resto} & \textbf{[0.5pto]} \end{array}\right.$$

(b) $\sqrt{2}\cos\alpha,\ a \in \mathbb{Z}$ **[2pto]**

$a \geq 2,\ a \leq -2$ no hay solución	**[0.5pto]**
caso $a = 0$	**[0.5pto]**
caso $a = 1$	**[0.5pto]** (**[0.5pto]** por una solución)
caso $a = -1$	**[0.5pto]** (**[0.5pto]** por una solución)

$$\text{Gráfico } \textbf{[1pto]}\left\{\begin{array}{l} \text{conocimiento de } \cos x \\ \text{importancia de las soluciones de } \cos x = a,\ a \in \mathbb{Z} \\ [y] = \text{mayor entero que es} \leq y \end{array}\right.$$

Comentarios: En **(b)**: $\sqrt{2}\cos\alpha,\ a \in \mathbb{Z}$ basta que digan cuáles son las soluciones (una línea sin justificar). En **(b)**: gráfico de f. Si hay bosquejoy es correcto dar todo el puntaje. Si el bosquejo es básicamente correcto (por ejemplo si no le queda claro qué pasa en los extremos de los intervalos donde f es constante) **[0.8pto]**. Si los puntos de salto no son correctos, pero consistemtes con las soluciones que obtuvo de $\sqrt{2}\cos\alpha,\ a \in \mathbb{Z}$ dar **[1pto]**.

P2.-

Pauta.- **(ai)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{n}\right]$. Para $n \geq 1$ $0 \leq \frac{n-1}{n} < 1$ de donde $\left[\frac{n-1}{n}\right] = 0$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{n}\right] = 0.$$

(aii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!+1}$. **Primera forma:** escribirlo como el producto de una sucesión que converge a cero (sucesión nula) por una acotada (en este caso incluso convergente):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1} = 0$$

Segunda forma: reescribir el límite como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{(n+1)!}}$$

y por álgebra de sucesiones el límite es nulo. **Tercera forma:** teorema de comparación o "sandwich" considerando que

$$0 \leq \frac{n!}{(n+1)!+1} \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

(bi) Si $s_n = \dfrac{2^n+1}{n^2\,3^{n+1}}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(2/3)^n+(1/3)^n}{3} = 0$$

recordando que $q^n \to 0$ si $|q| < 1$ y además $\dfrac{1}{n^2} \to 0$.

(bii)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{n^2\, 3^{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \qquad (4)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \\
&= \frac{2}{3},
\end{aligned}
$$

pues $1+\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1$ y por lo tanto $\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} \to 1$ (visto en clase). Los límites de los dos primeros factores en (4) se vieron en clases y valen 1. De (4) se puede también obtener directamente el límite $2/3$ final si se usa la propiedad

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\} \quad \text{para } a,b>0.$$

(ci) $u_0 = \alpha \in (0,1/2)$, $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$.
$g(x) = 2(x-x^2)$. El gráfico de g es una parábola invertida:

$$g(x) = 2(-(x-1/2)^2 + 1/4) = -2(x-1/2)^2 + 1/2.$$

Luego el máximo de g es $1/2$ (el vértice es $(1/2,1/2)$). Veamos por inducción que $u_n \in (0,1/2)$. Si $n=0$ es una hipótesis, si suponemos que es cierto para n, entonces $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$ pero $1-u_n > 1/2$, $u_n > 0$, luego $u_{n+1} > 0$. Además del análisis de g es claro que $u_{n+1} = g(u_n) < 1/2$ pues $u_n \neq 1/2$.

(cii) Veamos que u_n es creciente:

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} \geq u_n &\Leftrightarrow 2u_n(1-u_n) \geq u_n \\
&\Leftrightarrow 2(1-u_n) \geq 1 \\
&\Leftrightarrow 1-u_n \geq 1/2 \\
&\Leftrightarrow 1/2 \geq u_n
\end{aligned}
$$

lo que es cierto.

(ciii) Como u_n es monótona y acotada, converge: $u_n \to u$. Además u_n es creciente, luego $u = \sup\{u_n,\ n\geq 0\} \geq \alpha > 0$. De la definición de u_n deducimos por álgebra de límites y subsucesiones que

$$u = 2u(1-u)$$

y como $u > 0$ despejando se obtiene $u = 1/2$.

Puntuación:

(ai) **[0.75pto]**

(aii) **[0.75pto]**

(bi) **[0.75pto]**

(bii) **[0.75pto]**

(ci) [**1pto**] $\left\{\begin{array}{ll} \text{encontrar máximo de } g & \textbf{[0.4pto]} \\ \text{probar que } u_n > 0 & \textbf{[0.2pto]} \\ \text{probar que } u_n < 1/2 & \textbf{[0.4pto]} \end{array}\right.$

(cii) [**1pto**]

(ciii) [**1pto**] $\left\{\begin{array}{ll} \text{monótona acotada} & \textbf{[0.3pto]} \\ \text{ecuación límite de } u_n & \textbf{[0.4pto]} \\ u_n \neq 0 \text{ y por lo tanto } u = 1/2 & \textbf{[0.3pto]} \end{array}\right.$

P3.-

Pauta.- **(i)** Probemos que $(f(a_n))$ es decreciente. En efecto, como $a_{n+1} \leq a_n$ porque a_n es decreciente entonces $f(a_{n+1}) \leq f(a_n)$ pues f es creciente.

Veamos que $(f(a_n))$ es acotada inferiormente. Como a_n es acotada inferiormente $\exists m \in I\!R$ tal que $a_n \geq m$ $\forall n \in I\!N$ (m es cota inferior) luego $f(a_n) \geq f(m)$ $\forall n \in I\!N$, es decir $f(m)$ es cota inferior de $(f(a_n))$.

Por el Teorema de suceciones monótonas y acotadas se deduce que $(f(a_n))$ es convergente.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to \ell$, $\exists n_1 \in I\!N$ tal que

$$n \geq n_1 \to |a_n - \ell| < \varepsilon/2.$$

De la definición de $|a_n - b_n| \to 0$ también se desprende que $\exists n_2 \in I\!N$ tal que

$$n \geq n_2 \to |a_n - b_n| < \varepsilon/2.$$

Definamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces

$$n \geq n_0 \to \left\{\begin{array}{l} |a_n - \ell| < \varepsilon/2 \\ |a_n - b_n| < \varepsilon/2. \end{array}\right.$$

Por lo tanto, para $n \geq n_0$:

$$\begin{array}{rcl} |b_n - \ell| & = & |b_n - a_n + a_n - \ell| \\ & \leq & |b_n - a_n| + |a_n - \ell| \\ & < & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

(iii) Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $s_n \to \ell$ existe $n_0 \in I\!N$ tal que $\forall n \geq n_0$ $|s_n - \ell| < \varepsilon/2$. Sea $n \geq n_0$, con lo cual $n + 1 \geq n_0$ también; se tiene entonces que $\forall n \geq n_0$

$$|s_n - \ell| < \varepsilon/2, \quad |s_{n+1} - \ell| < \varepsilon/2.$$

Luego, si $n \geq n_0$ se tiene

$$\begin{aligned} |s_n + s_{n+1} - 2\ell| &= |s_n - \ell + s_{n+1} - \ell| \\ &\leq |s_n - \ell| + |s_{n+1} - \ell| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Puntuación:

(i) [**2pto**] $\left\{ \right.$

$(f(a_n))$ decreciente	[**0.8pto**]
$(f(a_n))$ acotada inferiormente	[**0.8pto**]
teorema de suc. monótonas y acotadas	[**0.4pto**]

(ii) [**2pto**] $\left\{ \right.$

planteamiento: "sea $\varepsilon > 0 \ldots$"	[**0.5pto**]
uso correcto de la definición $a_n \to \ell$ y $|a_n - b_n| \to 0$	[**0.5pto**]
encontrar n_0	[**0.5pto**]
uso de la desigualdad triangular y conclusión	[**0.5pto**]

(iii) [**2pto**] $\left\{ \right.$

planteamiento	[**0.5pto**]
usar $s_n \to \ell$	[**0.5pto**]
darse cuenta que el mismo n_0 sirve	[**0.5pto**]
desigualdad triangular y conclusión	[**0.5pto**]

Comentario: puede haber variantes correctas en la definición que se usa de convergencia: $\forall n > n_0$ en vez de $\forall n \geq n_0$ o $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ en vez de $|a_n - \ell| < \varepsilon$, o 2ε en vez de ϵ, etc.