Departamento de Ingeniería Matemática
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

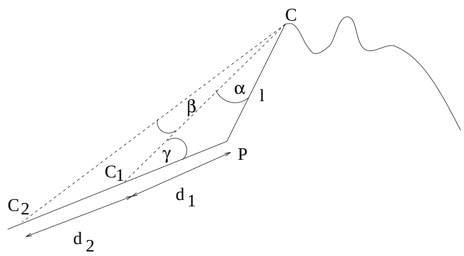
Control 2, MA12A, Otoño 1996

Problema 1. Un montañista está en la cima de un cerro y observa una cabaña C_1 con un ángulo α y otra cabaña C_2 con un ángulo $\alpha + \beta$. Su mapa indica que la cabaña C_1 se encuentra a una distancia d_1 del punto P, donde termina la ladera y comienza la falda del cerro, y que las cabañas están separadas por una distancia d_2.

1. Demuestre que la distancia l, desde la cima a P es:

$$l = \frac{d_1(d_1+d_2)sen(\beta)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2 sen^2(\beta) + d_2^2 sen^2(\alpha+\beta) - 2(d_1+d_2)d_2 sen(\alpha+\beta)sen(\beta)cos(\alpha)}}.$$

2. Pruebe que cuando $\alpha = \beta$ y $d_1 = d_2$ el ángulo γ(ver figura) es $\frac{\pi}{2}$.



Solución

1. Llamemos **x** al ángulo PC_2C e **y** al trazo CC_1. Aplicando Teorema del Coseno al triángulo PC_1C obtenemos:
$$d_1^2 = l^2 + y^2 - 2lycos(\alpha).$$
Para conocer y en términos de l aplicamos Teorema del Seno a los triángulos PC_2C y C_1C_2C obteniéndose.
$$\frac{sen(\beta)}{d_2} = \frac{sen(x)}{y} \quad \text{y} \quad \frac{sen(\alpha+\beta)}{d_2+d_1} = \frac{sen(x)}{l}$$
Entonces,
$$y = l\frac{sen(\alpha+\beta)d_2}{sen(\beta)(d_1+d_2)},$$
que reemplazado en la primera relación permite despejar l como el valor propuesto.

2. Reemplazando $\alpha = \beta$, $d_1 = d_2 = d$ en la expresión de l obtenemos
$$l = \frac{2d^2 sen(\alpha)}{\sqrt{4d^2 sen^2(\alpha) + d^2 sen^2(2\alpha) - 4d^2 sen(2\alpha)sen(\alpha)cos(\alpha)}}$$
$$= \frac{2d^2 sen(\alpha)}{\sqrt{d^2(4sen^2(\alpha) + 4sen^2(\alpha)cos^2(\alpha) - 8sen^2(\alpha)cos^2(\alpha))}}$$
$$= \frac{dsen(\alpha)}{\sqrt{sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha)cos^2(\alpha)}} = \frac{dsen(\alpha)}{\sqrt{sen^2(\alpha)sen^2(\alpha)}} = \frac{d}{sen(\alpha)}$$
Así, aplicando Teorema del Seno al triángulo PC_1C, obtenemos
$$sen(\gamma) = l\frac{sen(\alpha)}{d} = 1$$
es decir $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Problema 2.

1. Para $a > 0$, encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación.

$$\frac{|x-a| - |x+a|}{(x^2 - a^2)} > 0$$

Solución. Dado $a > 0$, el conjunto solución de la inecuación es la unión de los tres conjuntos siguientes:

$$A_1 = \{x < -a : r(x) > 0\}, A_2 = \{|x| < a : r(x) > 0\} \text{ y } A_3 = \{x > a : r(x) > 0\}$$

Ahora,

$$x \in A_1 \text{ ssi } x < -a \text{ y } \frac{(a-x) - (-(x+a))}{(x-a)(x+a)} = \frac{2a}{(x-a)(x+a)} > 0 \text{ ssi } x < -a.$$

es decir, $A_1 = (-\infty, -a)$. Además,

$$x \in A_2 \text{ ssi } -a < x < a \text{ y } \frac{(a-x) - (x+a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{-2x}{(x-a)(x+a)} > 0 \text{ ssi } -a < x \text{ y } 0 < x.$$

es decir, $A_2 = (0, a)$. Por último,

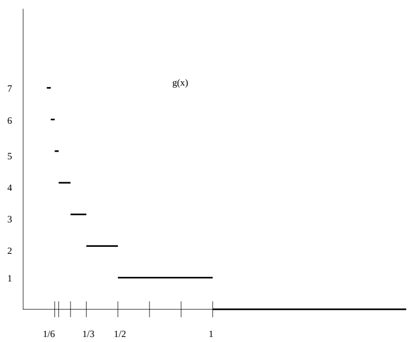
$$x \in A_3 \text{ ssi } a < x \text{ y } \frac{(x-a) - (x+a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{-2a}{(x-a)(x+a)} > 0 \text{ ssi } a < x \text{ y } -a < x < a.$$

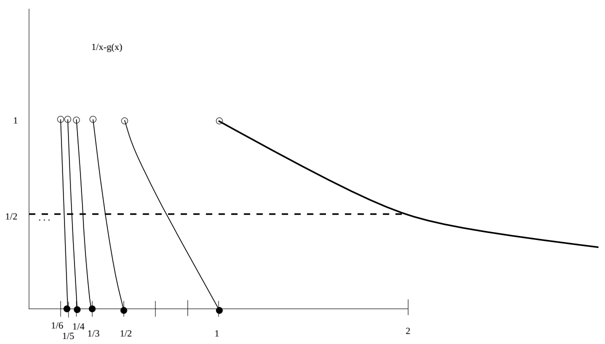
de modo que $A_3 = \emptyset$. Por lo tanto $A = (-\infty, -a) \cup (0, a)$.

2. Grafique la función $g : \{x \in IR : x > 0\} \to IR$ con $g(x) = sup\{n \in IN : nx \leq 1\}$. Pruebe que $inf(A) = 0$ y $sup(A) = 2$ para A dado por:

$$A = \{x > 0 : \frac{1}{x} - g(x) = \frac{1}{2}\}$$

Solución. La función $g(x)$ corresponde a encontrar el mayor entero que es inferior a $\frac{1}{x}$. Para $x > 1$ este entero es 0. Para $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ este entero es n. Así, las gráficas de las funciones $g(x)$ y $\frac{1}{x} - g(x)$ son:





Como $A \subset IR^+$ se tiene que 0 es una cota inferior. Vamos a probar que 0 es el ínfimo. Una forma de hacerlo es utilizar la siguiente caracterización:

$$a = inf(A) \Leftrightarrow \forall x \in A x \leq a y \forall \epsilon > 0 \exists x \in A, x < a + \epsilon$$

Sea $\epsilon > 0$ y consideremos $x_n = \frac{2}{1+2n}$. Entonces, $\frac{1}{x_n} = n + \frac{1}{2}$ con lo cual $g(x_n) = n$. Además, $\frac{1}{x_n} - g(x_n) = \frac{1}{2}$ lo que muestra que $x_n \in A$. Usando la propiedad arquimediana podemos escoger $n > \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2}$ y entonces $x_n < \frac{2}{1+\frac{2}{\epsilon}-1} = \epsilon$

Otra forma es proceder por contradicción. Supongamos que $a = inf(A) > 0$. Entonces, vamos a encontrar $x \in A$ con $0 < x < a$ de modo que a no puede ser cota inferior de A y por ende no puede ser el ínfimo.

Utilizando $x_n = \frac{2}{1+2n}$ con $n > \frac{1}{a} - \frac{1}{2}$ se muestra, igual que antes, que $x_n \in A$ y que $0 < x_n < a$.

Para probar que $sup(A) = 2$ mostremos que $2 \in A$ y que todo $x \in A$ es menor que 2. $2 \in A$ pues $\frac{1}{2} - g(2) = \frac{1}{2}$. Además, si $x > 2$ se tiene que $\frac{1}{x} - g(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$. Luego, para todo $x \in A$, $x \leq 2$. Concluimos que $sup(A) = max(A) = 2$.

Problema 3. Considere la fórmula

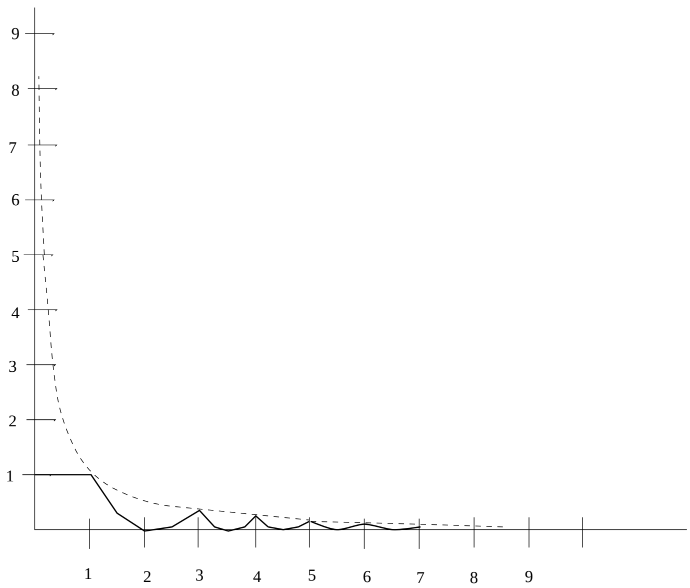
$$f(x)=\begin{cases} x-2n & x\in[2n,2n+1],\ n\geq 0\\ 2n+2-x & x\in[2n+1,2n+2),\ n\geq 0\end{cases}$$

1. Verifique que f es una función de $I\!R^+$ en $I\!R$.
2. Encuentre el mayor conjunto $A\subseteq I\!R$ donde la fórmula $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ define una función.
3. Muestre que $\forall n\geq 0$, $h:(2n+1,2n+2)\to I\!R, x\to g(x)$ es estrictamente decreciente y que para $n>0$, $h':(2n,2n+1)\to I\!R, x\to g(x)$ es estrictamente creciente.
4. Grafique la función $g:A\to I\!R$.
5. Pruebe que $\forall n\in I\!N$ $F:[2n+1,2n+2)\to(0,\frac{1}{2n+1}]$ es biyectiva. Encuentre la inversa.

Solución

1. Para que f defina una función, debemos verificar que $f(2n+1)$ está definido de manera única. Es decir que $2n+1-2n=2n+2-(2n+1)=1$
2. Claramente $A=\{x\in I\!R : x>0\}$.
3. Sea $n\in I\!N$ y x e y satisfaciendo $2n+1<x<y<2n+2$. Entonces, $(2n+2)x<(2n+2)y$ y sumando $-xy$ a ambos lados obtenemos $x(2n+2-y)=(2n+2)x-xy<(2n+2)y-xy=y(2n+2-x)$. Por lo tanto, $g(x)>g(y)$ y h es estrictamente decreciente.

   Además, para $n>0$ y $2n<x<y<2n+1$, $-\frac{2n}{x}<-\frac{2n}{y}$. Sumando 1 a ambos lados obtenemos $h'(x)=\frac{x-2n}{x}<\frac{y-2n}{y}=h'(y)$.



4.

5. Para $y\in(0,\frac{1}{2n+1}]$ sea $x=\frac{2n+2}{1+y}$. Entonces $2n+1\leq x<2n+2$ y $F(x)=y$. Por lo tanto, la función es epi(sobre)yectiva. Además, como F es estrictamente decreciente(parte 3) sabemos que es inyectiva y por lo tanto biyectiva. La función inversa está dada por

$$F^{-1}(y)=\frac{2n+2}{1+y}$$