PAUTA N^o 2 DE MA12A-CALCULO

29.7.97

Problema 1.

(1) Aplicando el cambio de base

$Log_x a = \frac{Log_{10} a}{Log_{10} x}$, 0.4 $Log_{x^2} b = \frac{log_{10} b}{log_{10} x^2}$ 0.4

y $log_{10} x^2 = 2Log_{10} x$ 0.4

se obtiene

$$C = \frac{1}{log_{10} x}\left(log_{10} a + \frac{log_{10} b}{2}\right) = \frac{log_{10} a\sqrt{b}}{log_{10} x} \qquad 0.4$$

luego $log_{10} x = log_{10}(a \cdot \sqrt{b})^{1/c}$ $10^{(\ )}$ 0.4.

Conclusión $x = (a \cdot \sqrt{b})^{1/c}$

Resumen: cambio de base 0.8

$log x^\alpha = \alpha log x$ 0.4

$log a + log b = log a \cdot\ b$ 0.4

$10^{log(x)} = x$ 0.4

(2) a) la fórmula tiene sentido para $x \neq -1$ 0.5 y

$$1 - \frac{2}{1+x} \geq 0, \text{ es decir } 1 \geq \frac{2}{1+x} \quad \begin{array}{l} 1+x > 0 \wedge 1+x \geq 2 \quad \text{ó} \\ 1+x < 0 \wedge 1+x \leq 2 \end{array}$$

luego $x \geq 1 \vee \ x < -1$

Así:

$$A =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\qquad 0.5$$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{1+x} \Leftrightarrow 1 + x = 2 \ \ x = 1$ 0.3

es positiva en A. 0.2

c) como $f(3) = \sqrt{1/2} \neq \pm\sqrt{2} f$ no es par ni impar 0.2
además $f(x) = f(x) + T) \Leftrightarrow \frac{2}{1+x} = \frac{2}{1+x+T} \Leftrightarrow T = 0$ luego no es periódica 0.3

d) Dados x e y tales que $f(x) = f(y)$ obtenemos

$$\frac{2}{1+x} = \frac{2}{1+y} \Rightarrow x = y \text{ luego es inyectiva} \qquad 0.5$$

e) $x, y \in [1, +\infty[\;\; x < y$

$$0 < 1 + x < 1 + y \Leftrightarrow \frac{2}{1+x} > \frac{2}{1+y} \Leftrightarrow \frac{-2}{1+y} > \frac{-2}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{1+y} > 1 - \frac{2}{1+x} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{1+g}} > \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(y) > f(x). \qquad 0.5$$

Así, en $[1, +\infty[$ f crece.

$$x, y \in]-\infty, -1[\;\; x < y$$

$$1 + x < 1 + y < 0 \qquad \frac{1}{1+y} < \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{-2}{1+y} > \frac{-2}{1+x} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{1+y}} > \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$$

$$f(y) > f(x) \qquad 0.5$$

f)

0.2

$$Y \in I\!R^+ \quad y = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}} \quad x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$$

$$1 - y2 = \frac{2}{1+x} \quad x = \frac{2}{1-y2} - 1. \quad y \neq 1$$

$$y > 1 \Rightarrow x = \frac{2}{1-y2} - 1 < -1. \quad x \in A \qquad 0.3$$

$0 \leq y < 1 \Rightarrow 1 \geq 1 - y^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-y2} \geq 1 \Rightarrow x = \frac{2}{1-y2} - 1 \geq 1$ xxxxxx es $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Problema 2.

1. Usando que $sec^2(x/2) = \frac{1}{cos^2 x/2}$ y que $tg(x/2) = \frac{sen(x/2)}{cos(x/2)}$

El lado izquierdo se puede escribir como

$$\frac{senx}{2cos^2 x/2} + cosx\frac{senx/2}{cosx/2} - senx = \frac{senx + 2cosxsenx/2cosx/2 - \pi cos^2 x/2senx}{2cos2x/2}$$

$$= \frac{senx(1 + cosx - 2cos^2 x/2}{2cos^2 x/2} = 0 \qquad 0.5$$

Lo anterior tiene sentido para $x \neq (2k+1)\pi$. 0.5

2) (a) $\alpha = \frac{sen\alpha}{sen\beta} \cdot a$ 1.0

(b) $h = (\alpha^2 + b^2 - 2\alpha bcos(\pi - \beta)^{1/2} = (\frac{sen^2\alpha}{sen^2\beta}a^2 + b^2 + 2\frac{sen\alpha}{sen\beta}cos\beta ab)^{1/2}$ 1.0

(c) Sea $\delta = E\ D\ A$

(1) $sen\delta = \frac{sen(\pi-\beta)}{n}b = -sen(\beta)\frac{b}{n}$ 0.5
Sea $\theta = ADB\ \theta + \delta = \alpha + \beta, \theta = \alpha + \beta - \delta$
Sea $\mu = ABD\ \mu = \pi - (\gamma + \theta) = \pi - (\gamma + \alpha + \beta - \delta)$

(2) $x = \frac{sen\theta}{sen\mu} \cdot h$ 0.5

(3) $sen\theta = sen(\alpha + \beta - \delta) = cos(\alpha + \beta)sen(\delta) - sen(\alpha + \beta)cos\delta$

(4) $sen\mu = -sen(\alpha + \beta + \gamma)cos\delta - cos(\alpha + \beta + \gamma)sen\delta$

(5) $cos\delta = \sqrt{1 - sen^2\delta}$

Reemplazando 1 y 5 en 3 y 4 y luego esto más (b) en 2 nos da un valor de x que sólo depende de α, β, γ, a 0.5

Problema 3. (1ra. Solución)

(1) Lo que hay que probar es que dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in I\!N$ tal que $\forall n \geq n_0$ $|au - 1/2| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, examinamos para que valores de $n, |au - 1/2| < \varepsilon$ es decir, resolvemos la inecuación

$$|au - 1/2| = \frac{5}{2n^2+3} < \varepsilon \qquad 1.0$$

como $2u^2 + 3 \geq 0$ se tiene que 1 equivalente a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 3\right) < n^2 \qquad 0.5$$

Para $\varepsilon \leq \frac{5}{3}$ podemos escoger $n_0 = [1/2(5/3 - 3)^{1/2}] + 1$ 1.0

Para $\varepsilon > 5/3$ podemos escoger $n_0 = 0$ de la forma de escoger n_0, se tiene que, $\forall n \geq n_0$

$$\frac{1}{2}(\frac{5}{\varepsilon} - 3) < n^2 \text{ y por lo tanto } |au - 1/2| < \varepsilon. \qquad 0.5$$

(2) (a) Como $au \to 1$ sabemos que existe n_1 tal que $\forall n \geq n_1$

$$|au - 1| < 1/3 \Rightarrow an > 2/3 \qquad 0.5$$

como $b_n \to 0$, existe n_2 tal que $\forall n \geq n_2$

$$|b_n| < 1/3 \qquad 0.5$$

Así, tomando $n_0 = \max\{n_2, n_2\}$ y $n \geq n_0$ se tiene que

$$au > 2/3 > 1/3 > bn. \qquad 0.5$$

(b) Dado $\varepsilon > 0$ debemos probar que $\exists n_3 \in I\!N, \forall |c_N - 1| < \varepsilon$.
Sea $\varepsilon > 0$. Como

$$au \to 1 \ \exists n_4, \forall n \geq n_4 \quad |au - 1| < \varepsilon \qquad 0.5$$

tomando $n_3 = \max\{n_4, n_0\}$ (parte (a) 0.5 tenemos que, para $n \geq n_3$

$$|au - 1| < \varepsilon \wedge C_n = au \Rightarrow |C_n - 1| > \varepsilon. \qquad 0.5$$

Así $(C_n) \to 1$.

Problema 3. (2da. Solución)

1) Lo que hay que probar es que dado $\varepsilon > 0$ el conjunto $A\varepsilon(au-1) = \{n \in I\!N, |au-1| < \varepsilon\}$ es cofinito, es decir, que $I\!N \setminus A\varepsilon(au-1)$ es finito. Vemos que

$$k \in I\!N \setminus A \in (au-1) \Leftrightarrow |a_k - 1| \geq \varepsilon.$$

Como $|a_k - 1| = \frac{5}{2k^2+3}$, lo que tenemos que ver es que la inecuación

1 .0 $\frac{5}{2k^2+3} \geq \varepsilon$ tiene un número finito de soluciones naturales. Esto último es claro pues (1) equivale a

$$\frac{1}{2}(\frac{5}{\varepsilon} - 3) \geq k^2 \quad (1.0)$$

que sólo admite un número finito de soluciones naturales. 1.0.

2) (a) Como $a_n \to 1$ y $bn \to 0$ sabemos que $A\frac{1}{3}(a_n - 1)$ y $A\frac{1}{3}(bn)$ son cofinitos y entonces lo es su intersección C. 0.5

$$k \in C \Leftrightarrow |ak-1| < \frac{1}{3} \wedge |b_k| < 1/3$$

lo que implica que $a_k > 2/3 > 1/3 > b_k$, es decir 0.5

$C \subset \{n \in I\!N,\ an > bn\} = E$ que por lo tanto es cofinito. Se sabe que esto equivale a que $\exists n_0, \forall n \geq n_0\ \ au > bn$. 0.5

b) Sea $\varepsilon > 0, A\varepsilon(au-1)$ es cofinito y 0.5

$$A_\varepsilon(a_n - 1) \cap \{n \in I\!N, a_n > b_n\} \subseteq A_\varepsilon(C_n - 1). \qquad 0.5$$

De la parte (a) sabemos que E es cofinito por lo tanto $A_\varepsilon(C_n - 1$ lo es. 0.5