U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control #2 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2004-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **a)** (2 ptos.) Analice completamente la función $f(x) = |\cos(x) - 1|$ indicando su dominio, ceros, signos, paridad, crecimiento, acotamiento, periodicidad y gráfico.

b) Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

(i) (1 pto.) Encuentre su dominio A, ceros y signos.

(ii) (1 pto.) Pruebe que f es inyectiva.

(iii) (1 pto.) Demuestre que el recorrido de f es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

(iv) (1 pto.) Encuentre la función inversa de $f : A \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ y explicite su dominio y recorrido.

Pauta. **a)** El análisis de esta función se simplifica con la siguiente observación: $\cos(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ por lo que $\cos(x) - 1 \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente

$$f(x) = |\cos(x) - 1| = -(\cos(x) - 1) = 1 - \cos(x).$$

Dominio. $dom(f) = \mathbb{R}$.

Ceros. $f(x) = 0$ equivale a $\cos(x) = 1$. Esto ocurre sólo cuando $x = 2\pi k$ para algún entero k. Luego el conjunto de ceros de f es $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Signos. $f(x) = |\cos(x) - 1| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Paridad. f es par:

$$f(-x) = 1 - \cos(-x) = 1 - \cos(x) = f(x).$$

Crecimiento. Dada la fórmula $f(x) = 1 - \cos(x)$ observamos que f es creciente en un intervalo I si y sólo si $\cos(x)$ es decreciente en ese intervalo. Es sabido que $\cos(x)$ es decreciente sobre los intervalos de la forma $[2\pi k, 2\pi k + \pi]$ con $k \in \mathbb{Z}$ por lo que f es creciente sobre todos los intervalos de la forma $[2\pi k, 2\pi k + \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Por otro lado $\cos(x)$ es creciente sobre todos los intervalos de la forma $[2\pi k - \pi, 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$ y luego f es decreciente sobre estos intervalos.

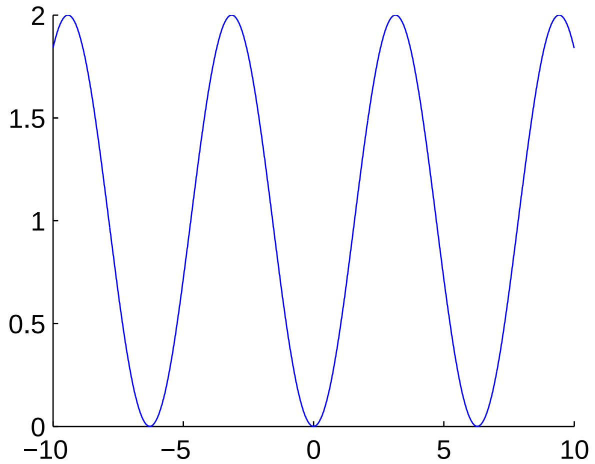
Acotamiento. f es acotada. En efecto, ya dijimos que $f(x) \geq 0$ para todo x. Por otro lado

$$f(x) = 1 - \cos(x) \leq 1 + 1 = 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Periodicidad. f es periódica de período 2π ya que la función $\cos(x)$ tiene esta propiedad y por lo tanto

$$f(x + 2\pi) = 1 - \cos(x + 2\pi) = 1 - \cos(x) = f(x).$$

Gráfico.



b) **(i)** Dominio. $f(x)$ está bien definida para x tal que $2x+1 \neq 0$, es decir, cuando $x \neq -\frac{1}{2}$. Por lo tanto $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Denotamos el dominio de f por $A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

Ceros. $f(x) = 0$ equivale a $x \in A$ y $x+1=0$. Luego el único cero de f es -1.

Signos. Tenemos que determinar sobre qué intervalos se tiene $f \geq 0$ y sobre cuáles $f \leq 0$. $f(x) \geq 0$ es equivalente a

$$\frac{x+1}{2x+1} \geq 0.$$

Esto último es equivalente a

$$\text{caso 1: } 2x+1>0 \text{ y } x+1 \geq 0, \text{ o}$$

$$\text{caso 2: } 2x+1<0 \text{ y } x+1 \leq 0.$$

El caso 1 se cumple solamente para $x > -\frac{1}{2}$ y el caso 2 se cumple sólo para $x \leq -1$. Luego $f(x) \geq 0$ para $x \in (-\infty, -1] \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$.

Para resolver $f \leq 0$ procedemos análogamente:

$$\frac{x+1}{2x+1} \leq 0$$

equivale a

$$2x+1>0 \text{ y } x+1 \leq 0, \text{ o}$$

$$2x+1<0 \text{ y } x+1 \geq 0.$$

En el primer caso obtenemos $x > -\frac{1}{2}$ y $x \leq -1$, es decir, no se cumple para ningún x. El segundo lo podemos escribir como $x < -\frac{1}{2}$ y $x \geq -1$, es decir $x \in [-1, -\frac{1}{2})$. Luego $f(x) \leq 0$ para $x \in [-1, -\frac{1}{2})$.

(ii) Para probar que f es inyectiva, supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$ donde $x_1, x_2 \in A$. Entonces

$$\frac{x_1+1}{2x_1+1} = \frac{x_2+1}{2x_2+1}$$

y luego

$$(x_1+1)(2x_2+1) = (x_2+1)(2x_1+1).$$

Desarrollando obtenemos

$$2x_1x_2 + x_1 + 2x_2 + 1 = 2x_1x_2 + x_2 + 2x_1 + 1$$

y entonces

$$x_2 = x_1.$$

(iii) Sea $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Buscamos $x \in A$ tal que $f(x) = y$, es decir

$$\frac{x+1}{2x+1} = y.$$

Resolviendo en x

$$x + 1 = 2xy + y \Leftrightarrow x(1 - 2y) = y - 1$$

Como $y \neq \frac{1}{2}$ encontramos

$$x = \frac{y-1}{1-2y}.$$

Notar que $x \neq \frac{-1}{2}$ ya que de lo contrario, volviendo a la ecuación anterior obtendríamos

$$\frac{1}{2} = -y + y = 0,$$

imposible. Luego y está en el recorrido de f y esto prueba que $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \subset Rec(f)$.
La inclusión $Rec(f) \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ resulta de observar que si $x \in A$ y

$$\frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2},$$

entonces

$$x + 1 = x + \frac{1}{2} \qquad \text{y luego } 1 = \frac{1}{2},$$

imposible.

(iv) La fórmula para la f^{-1} fue encontrada en la parte anterior,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{1-2y}.$$

Tenemos además que $dom(f^{-1}) = Rec(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ y $Rec(f^{-1}) = dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, es decir

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}.$$

Puntaje.

a)		0.2 ptos.	dominio
		0.2 ptos.	ceros
		0.2 ptos.	signos
		0.2 ptos.	paridad
		0.2 ptos.	acotamiento
		0.2 ptos.	periodicidad
		0.4 ptos.	crecimiento
		0.4 ptos.	gráfico
b)	**(i)**	0.2 ptos.	dominio
		0.2 ptos.	ceros
		0.6 ptos.	signos
	(ii)	1 pto.	
	(iii)	0.8 ptos.	por resolver x en términos de y
		0.2 ptos.	por verificar que $\frac{1}{2} \notin rec(f)$
	(iv)	0.5 ptos.	por escribir el dominio y recorrido de f^{-1}
		0.5 ptos.	por la fórmula de f^{-1}.

Nota: normalmente al resolver este problema se encuentra la fórmula para f^{-1} cuando se trata de probar que el recorrido de f es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. El puntaje descrito anteriormente está pensado para este caso, es decir, cuando el alumno se da cuenta que hizo el cálculo en (iii) y en (iv) repite la fórmula. Sólo por eso recibe 0.5 ptos.

P2.- **a)** Considere la sucesión (s_n) definida por recurrencia mediante

$$s_1 = 1 \qquad s_{n+1} = \sqrt{\frac{9+s_n^2}{2}} \quad \forall n \geq 1.$$

(i) (1 pto.) Pruebe que (s_n) es acotada superiormente.

(ii) (1 pto.) Verifique que (s_n) es creciente.

(iii) (1 pto.) Deduzca que (s_n) es convergente y calcule su límite.

b) Calcule los siguientes límites, justificando apropiadamente:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{5n-n^3}$ **(ii)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}}$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a+b}}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{b}}$, con $a>0$, $b>0$ **(iv)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n - n3^n}{n^{10}2^n+(n+1)3^n}$ **(vi)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$.

Pauta. **a)** **(i)** Primeramente debemos tener una idea de cuál podría ser una cota superior de (s_n). Después de resolver la parte (iii) uno se da cuenta que 3 es cota superior. Probemos esto por inducción. Para s_1 se tiene por definición. Suponiendo $s_n \leq 3$ tenemos

$$\begin{aligned} s_{n+1} = \sqrt{\frac{9+s_n^2}{2}} &\leq \sqrt{\frac{9+9}{2}} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado el hecho que la función raíz cuadrada es monótona creciente.

(ii) Esto se puede hacer por inducción, pero utilizando la cota superior $s_n \leq 3$ $\forall n \geq 1$ resulta más sencillo proceder directamente. En efecto

$$s_{n+1}^2 = \frac{9+s_n^2}{2} \geq \frac{s_n^2+s_n^2}{2} = s_n^2.$$

Como la función raíz cuadrada es creciente deducimos que

$$s_{n+1} \geq s_n.$$

<u>Segunda forma por inducción.</u> El primer caso corresponde a verificar que $s_2 \geq s_1$. Pero $s_1 = 1$ y $s_2 = \sqrt{5} \geq 1$.

Para el paso inductivo supongamos que $s_n \leq s_{n+1}$. Entonces

$$s_{n+2} = \sqrt{\frac{9+s_{n+1}^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{9+s_n^2}{2}} = s_{n+1}.$$

(iii) Por el teorema de las sucesiones monótonas se deduce que (s_n) es convergente, es decir $s_n \to l$. Para calcular el límite utilizamos que $s_{n+1} \to l$. Podemos escribir la relación de recurrencia como

$$s_{n+1}^2 = \frac{9+s_n^2}{2}.$$

Utilizando los resultados usuales de álgebra de límites se obtiene

$$l^2 = \frac{9+l^2}{2}$$

y resolviendo encontramos

$$l = \pm 3.$$

Del crecimiento de (s_n) tenemos que $s_n \geq s_1 = 1$ $\forall n \geq 1$ y deducimos que $l \geq 1$. Por lo tanto $l = 3$.

b) (i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{5n-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n^2}-1}$$
$$= -2.$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

Esto se puede justificar por el teorema del "sandwich":

$$\left|\frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

o de manera muy parecida, diciendo que $\frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}}$ es el producto de una sucesión acotada $\sin(2^n)$ por una nula: $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(iii) Sean $a>0$, $b>0$ dos constantes. Entonces es sabido que $\sqrt[n]{a+b}\to 1$, $\sqrt[n+1]{a}\to 1$, $\sqrt[n+2]{b}\to 1$ (en estos dos últimos casos hemos utilizado que $\sqrt[n+1]{a}$ y $\sqrt[n+2]{b}$ son subsucesiones de $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ respectivamente). Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a+b}}{\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{b}} = \frac{1}{2}.$$

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}.$$

Pero

$$0 \leq \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \leq \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n})^2} = \frac{1}{4n} \to 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

(v)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n - n3^n}{n^{10}2^n+(n+1)3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n - n3^n}{n^{10}2^n+(n+1)3^n} \cdot \frac{n^{-1}(\frac{1}{3})^n}{n^{-1}(\frac{1}{3})^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\frac{2}{3})^n - 1}{n^9(\frac{2}{3})^n + \frac{n+1}{n}}.$$

Recordemos que si $|a|<1$ entonces $a^n\to 0$ y más aún, para cualquier entero k, $n^k a^n \to 0$ cuando $n\to\infty$. Luego

$$n(\frac{2}{3})^n \to 0, \qquad n^9(\frac{2}{3})^n \to 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n - n3^n}{n^{10}2^n+(n+1)3^n} = -1.$$

(vi) Para calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$$

notemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$. En particular, para $n\geq 3$ tenemos $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. Se sigue que

$$0\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left(\frac{5}{6}\right)^n \qquad \forall n\geq 3.$$

Como el lado derecho de la desigualdad anterior tiene límite cero, por "sandwich" concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n=0.$$

Puntaje.

a)	**(i)**	0.3 ptos.	por "adivinar" un candidato razonable de cota superior
		0.7 ptos.	por probar que se tiene una cota superior
	(ii)	0.3 ptos.	si el alumno demuestra que sabe qué es una sucesión creciente
		0.7 ptos.	por una demostración correcta
	(iii)	0.3 ptos.	por mencionar el teorema de las sucesiones monótonas
		0.5 ptos.	por tomar el límite en la relación de recurrencia y resolver
		0.2ptos.	por descartar -3
b)		0.5 ptos.	por cada uno de los límites. Es necesario justificar las respuestas para obtener todo el puntaje.

Nota: en 1. a) (iii) se necesita saber que $s_{n+1}\to l$. No se debe castigar el puntaje por no decir que se trata de una subsucesión de s_n. Asimismo, para 2. b) (iii) no es necesario decir explícitamente que $\sqrt[n+1]{a}$ es subsucesión de $\sqrt[n]{a}$ para obtener todo el puntaje. En ambas preguntas se considera suficiente utilizar el correctamente resultado: $s_n\to l\Rightarrow s_{n+1}\to l$.

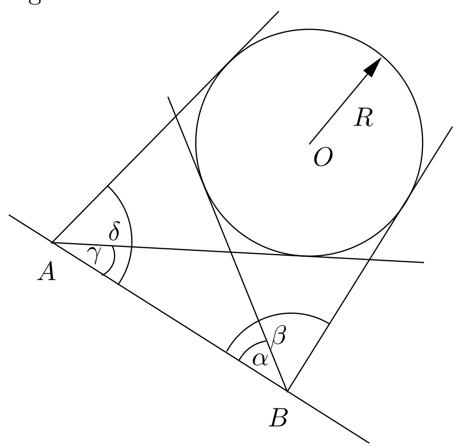
P3.- **a)** (3 ptos.) Pruebe la identidad

$$\frac{1}{\tan(3\alpha)-\tan(\alpha)}-\frac{1}{\operatorname{cotan}(3\alpha)-\operatorname{cotan}(\alpha)}=\operatorname{cotan}(2\alpha).$$

b) (3 ptos.) Se quiere medir el radio R de un estadio de forma circular, para lo cual se dispone de la distancia L entre los puntos A y B y los ángulos α, β, γ, δ entre las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por A y B y el trazo $\overline{AB}$, como se muestra en la figura.

Exprese R en términos de $L=\overline{AB}$ y α, β, γ, δ.

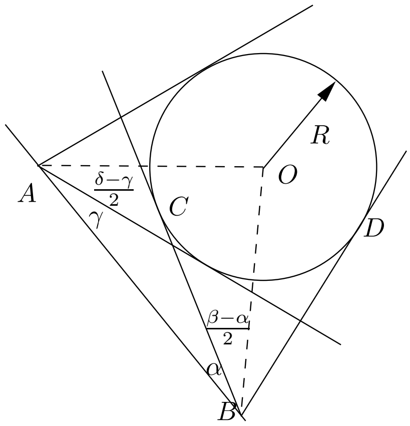
<u>Indicación:</u> una A y B con el centro O de la circunferencia y calculo los ángulos basales del triángulo ΔABO.



Pauta. **a)** Partimos desarrollando el lado izquierdo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan(3\alpha)-\tan(\alpha)}-\frac{1}{\cotan(3\alpha)-\cotan(\alpha)} &= \frac{1}{\frac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)}-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}-\frac{1}{\frac{\cos(3\alpha)}{\sin(3\alpha)}-\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}\\ &= \frac{\cos(3\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(3\alpha)\cos(\alpha)-\cos(3\alpha)\sin(\alpha)}-\frac{\sin(3\alpha)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)\cos(3\alpha)-\cos(\alpha)\sin(3\alpha)}\\ &= \frac{\cos(3\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(2\alpha)}+\frac{\sin(3\alpha)\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha)}\\ &= \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}\\ &= \cotan(2\alpha).\end{aligned}$$

b) Denotemos por O el centro de la circunferencia y por C y D los puntos donde las rectas por B que son tangentes a la circunferencia se intersectan con ésta.



Notemos que el segmento $\overline{BO}$ bisecta el ángulo CBD de lo cual se deduce que el ángulo CBO vale $\frac{\beta-\alpha}{2}$. De manera análoga se deduce el ángulo $\frac{\delta-\gamma}{2}$ de la figura. Con esto podemos ahora concluir que el ángulo AOB vale $\pi-(\frac{\beta-\alpha}{2}+\alpha)-(\frac{\delta-\gamma}{2}+\gamma)$, es decir, $\pi-\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$.
Por el teorema del seno aplicado en el triángulo ΔAOB obtenemos

$$\frac{\sin(\pi-\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}{\overline{AB}}=\frac{\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{\overline{OB}}$$

con lo cual podemos expresar $\overline{OB}$ en términos de cantidades conocidas

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{AB}\frac{\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{\sin(\pi-\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}\\ &= \overline{AB}\frac{\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}.\end{aligned}$$

Consideremos ahora el triángulo ΔBCO y notemos que el ángulo OCB es recto, por lo que

$$\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})=\frac{R}{\overline{OB}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}R &= \overline{OB}\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})\\ &= \overline{AB}\frac{\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})\\ &= L\frac{\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}\end{aligned}$$

Es posible obtener otras expresiones, como por ejemplo

$$R = L\frac{\sin(\frac{\beta+\alpha}{2})\sin(\frac{\delta-\gamma}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}.$$

Otras expresiones son todavía posibles, dado que en el problema los datos L, α, β, γ, δ no son independientes entre sí.

Puntaje.

Hay varias maneras de proceder en este problema, por lo que el puntaje a continuación es una indicación no exenta de ambigüedad.

a)	0.5 ptos.	por conocer la definición de tangente y cotangente
	0.5 ptos.	por usar las fórmulas para el seno, coseno (o tangente) de una suma (o diferencia) de ángulos
	2 ptos.	por el desarrollo correcto.
b)	0.5 ptos.	por identificar correctamente alguno de los ángulos $\frac{\beta-\alpha}{2}$ o $\frac{\delta-\gamma}{2}$ (u otros que reflejen la misma información)
	1 pto.	por calcular alguna distancia intermedia que sea de utilidad, como por ejemplo $\overline{OB}$ u $\overline{OA}$.
	1.5 ptos.	por el desarrollo correcto