Pauta Control #2 MA12A Cálculo
Pauta Problema 1

$f : A \subseteq I\!R \to I\!R$ t.q. $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$

i) • $A =$ Dom $f = \{x \in I\!R / 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in I\!R / x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$.

• f es función par: en efecto, $f(-x) = |-x| - \sqrt{1-(-x)^2} = |x| - \sqrt{1-x^2} = f(x)$.
Así $f(-x) = f(x)$

• Recorrido: Para $x \in [-1,1]$, $0 \leq |x| \leq 1$ y $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$.
Entonces $-1 \leq |x| - \sqrt{1-x^2} \leq 1$, es decir $1 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [-1,1]$.
Así: Recorrido de $f = [-1,1]$. Además $f(0) = -1 \wedge f(1) = 1$. **(1.0 pto.)**

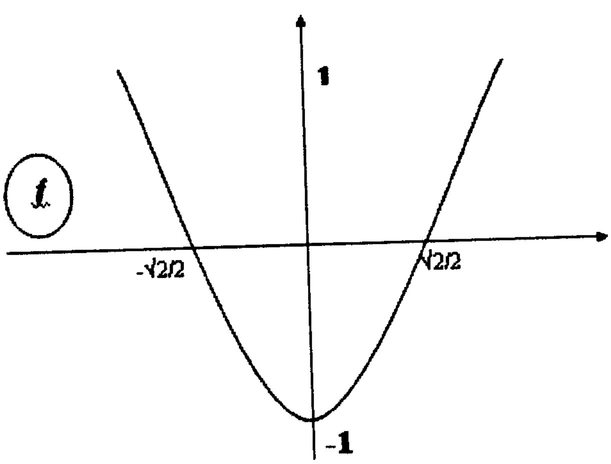
ii) Ceros de f : Como f es par, bastará encontrar sus ceros en $I\!R^+$.
Es decir $f(x) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 - x^2 \to 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\therefore$ Los ceros de f son $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.
Los signos de f podrán confirmarse con el crecimiento.
$f(x) < 0$ si $\quad x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$f(x) > 0$ si $\quad x \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ **(1.0 pto.)**

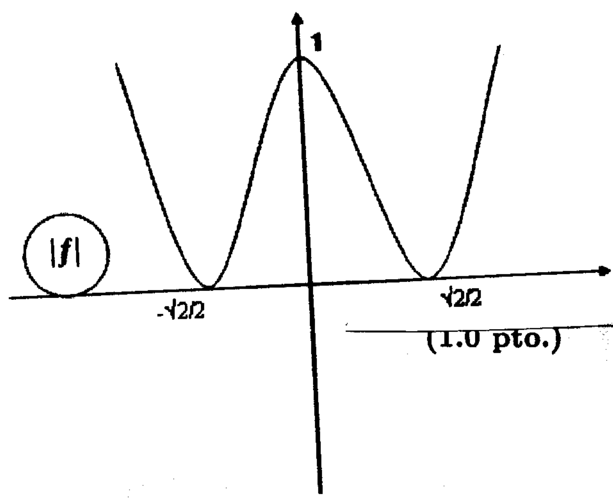
iii) Crecimiento en $[0,1]$: La parábola $1 - x^2$ decrece en $[0,1]$ y por lo tanto $\sqrt{1-x^2}$ decrece (composición de creciente sobre decreciente) de modo que su opuesta $-\sqrt{1-x^2}$ crece en $[0,1]$ y como $|x|$ crece en $[0,1]$ se tiene que $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$ crece en $[0,1]$ y decrece en $[-1,0]$. Como $f(0) = -1 \wedge f(1) = 1$ se confirma que Recorrido de $f = [-1,1]$ y los signos indicados en el punto anterior. **(1.0 pto.)**

iv) f no es inyectiva puesto que es par (También pueden darse contraejemplos como $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \wedge -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
f no es sobreyectiva pués $f(A) = [-1,1] \neq I\!R$. **(1.0 pto.)**

v) Como $A = [-1,1]$ y f es par, bastará escoger por ejemplo $B = [0,1] \subseteq A$ y con esto:
$f[0,1] \to [-1,1]$ es biyectiva y existe $f^{-1} : [-1,1] \to [0,1], f^{-1}(x) \geq 0$.
Para $f^{-1}(x)$: Como $f \circ f^{-1} = id \Rightarrow |f^{-1}| - \sqrt{1-(f^{-1})^2} = x$, pero $f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow f^{-1} - \sqrt{1-(f^{-1})^2} = x \Rightarrow 2(f^{-1})^2 - 2xf^{-1} + x^2 - 1 = 0$ entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{2-x^2}) \geq 0$.
(1.0 pto.)

v) Gráficos

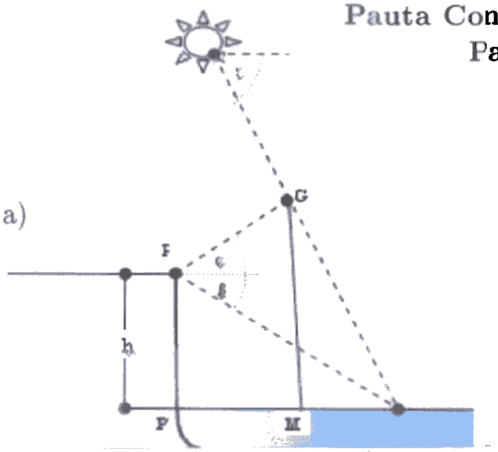




(1.0 pto.)

Pauta Control #2 MA12A Cálculo
Pauta Problema 2

a)



Por calcular la altura $H = GM$:
Es básico observar que los ángulos γ y β se reproducen en
$\gamma =$ ángulo $GSM \wedge \beta =$ ángulo PSM

Entonces en $\Delta PSP', \overline{PP'} = h$ y $sen\beta = \frac{h}{\overline{PS}}$
$\Rightarrow \overline{PS} = \frac{h}{sen\beta}$
En el triángulo GPS se conocen ángulo $GPS = \alpha + \beta$
ángulo $GSP = \gamma - \beta$ y $\overline{PS} = h/sen\beta$ y ángulo $PGS = \pi - (\alpha + \beta + \gamma - \beta)$
es decir $PGS = \pi - (\alpha + \gamma)$ (1.5 ptos)

Entonces aplicando el Teorema del seno al ΔPGS se tiene

$$\frac{\overline{PS}}{sen[\pi - (\alpha + \gamma)]} = \frac{\overline{GS}}{} \Rightarrow \overline{GS} = \overline{PS}\frac{sen(\alpha + \beta)}{sen(\alpha + \gamma)}$$

Entonces $\overline{GS} = \frac{h}{sen\beta}\frac{sen(\alpha+\beta)}{sen(\alpha+\gamma)}$ [recordar que $sen[\pi - (\alpha + \gamma)] = sen(\alpha + \gamma)$]
Por último, $\overline{GM} = H = \overline{GS} sen\gamma$. Así $H = h\frac{sen\gamma \cdot sen(\alpha+\beta)}{sen\beta \cdot sen(\alpha+\gamma)}$ (2.5 ptos)

b) Resolver $\frac{1-tgx}{1+tgx} = 1 + sen2x$. Reduciendo a senos y cosenos queda $\frac{1-\frac{senx}{cosx}}{1+\frac{senx}{cosx}} = 1 + 2senxcosx$

$$\Rightarrow \frac{cosx - senx}{cosx + senx} = 1 + 2senxcosx \Rightarrow cosx - senx = cosx + senx + 2senxcos^2x + 2sen^2xcosx$$

$$\Rightarrow senx(2 + 2cos^2x + 2senxcosx) = 0$$

Debe exigirse la siguiente discusión: El término $2 + 2cos^2x + 2sen \cdot cosx = 2 + (1 + cos2x) + sen2x = 3 + cos2x + sen2x$, nunca puede ser nulo por el acotamiento (1.0 pto)

de $sen2x$ y $cos2x$, es decir, $2 + 2cos^2x + 2senxcosx \neq 0 \ \forall x \varepsilon I\!R$

De modo que solo $senx = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, las soluciones.

(1.0 pto)

Pauta Control #2 MA12A Cálculo
Pauta Problema 3

a) i) Probar por inducción que $a_n \geq 2^n \quad \forall n \in I\!N$

- Para $n = 0$ $a_o = 1 \wedge 2^0 = 1$, entonces $a_0 \geq 2^0$
- Sea $a_n \geq 2^n$ algún $n \in I\!N$ (0.5 ptos)
- Por demostrar que $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$.

Por definición $a_{n+1} = a_n + b_n$, además $a_n \geq 2^n > 0$ de modo que de la relación $b_{n+1} = a_n + a_{n+1} > a_{n+1} \Rightarrow b_n > a_n$.

Entonces $a_{n+1} = a_n + b_n > a_n + a_n = 2a_n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ $\therefore a_n \geq 2^n$ $\forall n \varepsilon I\!N$

Así $0 < \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$ (por teorema del sandwich) (1.0 pto)

ii) Demostrar que $2a_n^2 = b_n^2 + (-1)^n$.

Inducción $n = 0$ $2a_0^2 = b_0^2 + (-1)^2$ esto es $2 \cdot 1^2 = 1^2 + 1$ se cumple.

Sea $2a_n^2 = b_n^2 + (-1)^n$ algún $n \in I\!N$. Por demostrar que $2a_{n+1}^2 = b_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$ (0.5 ptos)

En efecto $2a_{n+1}^2 = b_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \Leftrightarrow 2(a_n + b_n)^2 = (a_n + a_{n+1})^2 + (-1)^{n+1}$. Pero $a_{n+1} = a_n + b_n$

$\Leftrightarrow 2(a_n + b_n)^2 = (2a_n + b_n)^2 + (-1)^{n+1}$

$\Leftrightarrow 2a_n^2 + 4a_nb_n + 2b_n^2 = 4a_n^2 + 4a_nb_n + b_n^2 + (-1)^{n+1}$

$\Leftrightarrow 2a_n^2 = b_n^2 - (-1)^{n+1} \Leftrightarrow 2a_n^2 = b_n^2 + (-1)^n \quad (-(-1)^{n+1} = -(-(-1)^n) = (-1)^n)$

y esto último es la hipótesis de inducción. (1.0 ptos)

iii) Demostrar que $\frac{b_n}{a_n} \to \sqrt{2}$.

En efecto, de ii) $2a_n^2 = b_n^2 + (-1)^n \Rightarrow (\frac{b_n}{a_n})^2 = 2 - \frac{(-1)^n}{a_n^2}$ es decir $\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2 - \frac{(-1)^n}{a_n^2}}$.

Es directo, o acotando por el Teorema del sandwich, que, como $(\frac{1}{a_n})^2 \to 0$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \sqrt{2}$$

(1.0 pto)

b) $\lim n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1) = \lim n \frac{(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = \lim n \frac{(1+\frac{1}{n}-1)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{n} \to 0 \wedge \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 1)$ (0.5 ptos)

ii) Demostrar que $\forall b \in I\!R, b$ fijo $\frac{b^n}{n!} \to 0$.

En efecto. $\frac{b^n}{n!} = \frac{b \cdot b \ldots b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}$ en que tomaremos $b > 0$

Puede argumentarse que, como $\frac{b}{n} \to 0, \exists n_0$ t.q. $\forall n > n_0$ $\frac{b}{n} < 1$.

Así:
$$\frac{b^n}{n!} = \frac{bb...b...b}{1\cdot 2...n_0(n_0+1)...n} = \frac{b^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{b}{n_0+1}\cdot\frac{b}{n_0+2}...\frac{b}{n} < \frac{b^{n_0}}{n_0!}\frac{b}{n}$$

en que se mayoró $\forall n > n_0$ $\frac{b}{n} < 1$.

Entonces $0 < \frac{b^n}{n!} < \frac{b^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{b}{n}$.

Por teorema del Sandwich $\frac{b^n}{n!} \to 0$.

Si $b < 0$, puede reducirse a $-\frac{b^n}{n!} \to 0$ (con $b > 0$). (0.5 ptos)

iii) $v_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+1)2(n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$

Es decir $v_{n+1} < v_n$ entonces $(v_n)_{n\in I\!N}$ es decreciente y además acotada inferiormente por 0.

Entonces $(v_n)_{n\in I\!N}$ es monótona acotada, por lo tanto convergente. (0.5 ptos)

iv) Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3x+5}{n-5} = 3 \Leftrightarrow (\forall \in > 0)(\exists n_0 \in I\!N) n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{3n+5}{n-5} - 3\right| < \varepsilon$

En este caso $(\exists n_0 \in I\!N) n > n_0, \left|\frac{3n+5-3n+15}{n-5}\right| < 0.01$ es decir $\frac{20}{n-5} < 0.01 = \frac{1}{100} \Rightarrow n-5 > 2000$

$\Rightarrow n > 2005$.

Así, $n_0 = 2005$ garantiza que $\forall n > 2005$

$$\left(\frac{3n+5}{n-5}i\right) \in (3-0.01, 3+0.01) = (2.99, 3.01)$$ (0.5 ptos)