Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 8 de Junio del 2000.

Pauta CONTROL 3

Parte MA12A CALCULO 2000

Problema 1.

a) Dado $\alpha \in (0,1)$ se define la sucesión (a_n) mediante la recurrencia $a_1 = \alpha$ y $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$.

i) (2.0 pts.) Demostrar que $\forall n \geq 1$, $0 < a_n < 1$.

solución:
Aplicando inducción tenemos que $a_o = \alpha \in (0,1)$ (0.5 pts.). Si $a_n \in (0,1)$ entonces $0 < a_n < \frac{1+a_n}{2} < 1$ (0.5 pts). Como $\sqrt{}$ es est. creciente (0.5 pts.) tenemos que $0 = \sqrt{0} < \sqrt{a_n} < a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} < \sqrt{1} = 1$ (0.5 pts.).

ii) (2.0 pts.) Demostrar que (a_n) converge y calcular su límite.

solución:
Veamos que (a_n) es creciente. Como $\frac{1+a_n}{2} \in (0,1)$ tenemos que $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} > \frac{1+a_n}{2}$ (0.5 pts.) y además $a_n < 1$ entonces $\frac{1+a_n}{2} > a_n$. Concluimos que $a_{n+1} > a_n$ (0.5 pts.).
Tenemos que (a_n) es creciente y acotada superiormente por 1. Entonces, el Teorema de las Sucesiones Monótonas garantiza que (a_n) converge (0.5 pts.).
Como (a_{n+1}) converge a l y $\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$converge a $\sqrt{\frac{1+l}{2}}$ tenemos que el límite de (a_n) debe satisfacer la ecuación $l = \sqrt{\frac{1+l}{2}}$. La única solución no negativa de ésta es $l = 1$. Concluimos que el límite es $l = 1$ (0.5 pts).

b) (2.0 pts.) Dada la sucesión convergente (s_n), se define la sucesión (u_n) por $u_n = (-1)^n s_n$. Probar que (u_n) converge si y sólo si (s_n) converge a cero.
solución:
Si $(s_n) \to 0$ entonces $(-1)^n s_n \to 0$ pues $|(-1)^n s_n| = |s_n| \to 0$ (1.0 pto.).
Si llamamos v al límite de la sucesión (s_n) tenemos que $(u_{2n}) = (s_{2n}) \to v$ y $(u_{2n+1}) = (-s_{2n+1}) \to -v$ (0.5 pto.).
Si (u_n) converge, toda subsucesión lo debe hacer al mismo límite. Entonces $v = -v$ lo que implica que $v = 0$ (0.5 pts.).

Problema 2.

1. La sucesión $(\mathrm{sen}\,(\sqrt{n}))$ es acotada (0.5 pts.) y la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ (0.5 pts.). Entonces, $\left(\frac{\mathrm{sen}(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right) \to 0$.

2. Sabemos que $\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right) \to 1$ (0.5 pts.). Además, $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ entonces $\left(\frac{1}{n}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right) = \left(n\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to 0$ (0.5 pts.).

3. $\sqrt{n^6+n^3} - \sqrt{n^6-n^2} = \frac{n^6+n^3-\left(n^6-n^2\right)}{\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^2}} = \frac{n^3+n^2}{\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}$(0.4 pts.)
   Las sucesiones $1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n^3}, 1+\frac{1}{n^4} \to 1$ (0.2 pts.). Entonces $\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}, \sqrt{1-\frac{1}{n^4}} \to 1$ (0.2 pts.) y concluimos que la sucesión converge a $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$(0.2 pts.).

4. $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n$(0.3 pts.). $\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$ (0.3 pts). $\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \to e^2 \cdot 1 = e^2$ (0.4 pts.)

5. $\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!n!}{n!\prod\limits_{i=n+1}^{2n} i} = \prod\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{(n+i)}$ (0.3 pts.). Como $\frac{i}{n+i} < 1$ para $i = 1, ..., n$ tenemos que $0 < \frac{(n!)^2}{(2n)!} < \frac{1}{n+1}$(0.4 pts.). Las sucesiones de los extremos convergen a cero de modo que el Teorema del Sandwich asegura que la sucesión encajonada converge a cero (0.3 pts.).

6. $a_n = \frac{1-(-1)^n n}{4n+1}$. Si tomamos las subsucesiones (a_{2n}) y (a_{2n+1}) tenemos que $a_{2n} = \frac{1-2n}{8n+1} \to -\frac{1}{4}$ y que $a_{2n+1} = \frac{1-(-1)(2n+1)}{4(2n+1)+1} = \frac{2n+2}{8n+5} \to \frac{1}{4}$ (0.5 pts.). Siendo estos límites distintos, se concluye que (a_n) no converge (0.5 pts.).