Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 21 de Junio del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

PAUTA CONTROL 3

MA12A CALCULO 2001

Problema 1. Sea (a_n) una sucesión decreciente y convergente a 0. Se define la sucesión

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

(a) (1.5 pts.) Pruebe que (s_{2n}) es decreciente.

(b) (1.5 pts.) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n$, $0 \leq s_{2n} - s_{2m} \leq a_{2n}$.

(c) (1.5 pts.) A partir de lo anterior, deduzca que (s_{2n}) satisface el criterio de Cauchy.

(d) (1.5 pts.) Usando (c), pruebe que (s_{2n+1}) es convergente y concluya que (s_n) converge.

Solución:

(a) Tenemos que

(0.5 pts.) $$s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = -a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

Como (a_n) es decreciente, en particular $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$ **(0.5 pts.)**. Luego $s_{2n+2} - s_{2n} \leq 0$, es decir, (s_{2n}) es decreciente **(0.5 pts.)**.

(b) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$ (el caso $m = n$ es trivial). Como (s_{2k}) es decreciente, se tiene que $s_{2m} \leq s_{2n}$ de modo que $0 \leq s_{2n} - s_{2m}$ **(0.2 pts.)**. Por otra parte,

(0.3 pts.) $$s_{2n} - s_{2m} = \sum_{k=2n+1}^{2m} (-1)^{k+1} a_k = a_{2n+1} - a_{2n+2} + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m}$$

Sumando y restando a_{2n} al lado derecho y agrupando se obtiene

(0.4 pts.) $$s_{2n} - s_{2m} = a_{2n} + (-a_{2n} + a_{2n+1}) + \ldots + (-a_{2m-2} + a_{2m-1}) - a_{2m}$$

Como (a_n) es decreciente, se tiene que $\forall k \in \mathbb{N}$, $-a_{2k} + a_{2k+1} \leq 0$, razón por la cual todos los términos entre paréntesis son inferiores o iguales a 0 **(0.3 pts.)**. Más aún, (a_n) decrece a 0 por lo que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y en particular $-a_{2m} \leq 0$ y en conclusión $s_{2n} - s_{2m} \leq a_{2n}$ **(0.3 pts.)**.

(c) Como $a_n \to 0$ y $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $0 \leq a_n < \varepsilon$ **(0.3 pts.)**. En particular, si $n \geq n_0$ entonces $2n \geq n \geq n_0$ y en consecuencia $a_{2n} < \varepsilon$ **(0.3 pts.)**. Luego, si $m \geq n \geq n_0$ entonces de la parte (b) se deduce que $0 \leq s_{2n} - s_{2m} \leq a_{2n} < \varepsilon$ **(0.4 pts.)**. Luego, hemos probado que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m \geq n \geq n_0$, $|s_{2n} - s_{2m}| = s_{2n} - s_{2m} < \varepsilon$, que es el criterio de Cauchy **(0.4 pts.)**.

(d) Tenemos que $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1}$ **(0.2 pts.)**. Como (s_{2n}) es de Cauchy, por teorema visto en clases se sigue que es convergente a un límite que denotamos $\bar{s}$ **(0.3 pts.)**. Pero (a_n) converge a 0, de modo que la subsucesión (a_{2n+1}) también converge a 0 **(0.3 pts.)**. Por álgebra de límites, se sigue que $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} - \lim a_{2n+1} = \bar{s} - 0 = \bar{s}$ **(0.3 pts.)**. Para concluir que (s_n) converge, observamos primero que todo $n \in \mathbb{N}$ es de la forma $n = 2k$ o bien $n = 2k+1$ para un único $k \in \mathbb{N}$. Luego verificamos la definición de $s_n \to 0$: dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existen $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$, $|s_{2k} - \bar{s}| < \varepsilon$ y $\forall k \geq k_1$, $|s_{2k+1} - \bar{s}| < \varepsilon$. Tomando $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$ se deduce que $\forall n \geq 2k_2 + 1$, $|s_n - \bar{s}| < \varepsilon$ **(0.4 pts.)**.

Problema 2.

(a) (1.0 pto.) Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\bar{x} = 0$ y tal que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h\left(\frac{1}{n}\right) > 0$. Demuestre que $h(0)$ no puede ser estrictamente negativo.

(b) (2.5 pts.) Sea $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$. Demuestre que si g es continua en $\bar{x} = 1$ entonces g es continua en todo su dominio.
<u>Indicación</u>: demuestre primero que $g(1) = 0$.

(c) (2.5 pts.) Sean $h, g\colon [0,1] \to [0,1]$ continuas con $h(0) = 0$ y $g(1) = 0$. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $h(c) = g(c)$.

<u>Solución</u>:

(a) La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge a cero. La continuidad de h en cero implica que $h\left(\frac{1}{n}\right) \to h(0)$. **(0.5 pts.)** La condición del problema dice que la sucesión $h\left(\frac{1}{n}\right)$ es acotada inferiormente por cero, por lo que su límite $h(0)$, debe ser mayor o igual a cero **(0.5 pts.)**.

(b) Probemos dos propiedades de g. Primero, $g(1) = g(1 \cdot 1) = g(1) + g(1)$, luego $g(1) = 0$ **(0.5 pts.)**. Segundo, $0 = g(1) = g\left(\overline{x} \cdot \frac{1}{\overline{x}}\right) = g(\overline{x}) + g\left(\frac{1}{\overline{x}}\right)$, con lo que $g\left(\frac{1}{\overline{x}}\right) = -g(\overline{x})$ **(0.5 pts.)**. Supongamos que g es continua en $\overline{x} = 1$ y probemos que g es continua en todo $a \in (0, +\infty)$. Para ello sea $(a_n) \to a$, con $a_n \in (0, +\infty)$. Entonces, $\left(\frac{a_n}{a}\right) \to 1$ **(0.5 pts.)**. Como g es continua en 1, se tiene que $g\left(\frac{a_n}{a}\right) \to g(1) = 0$ **(0.5 pts.)**, luego $g(a_n) = g(a_n) - g(a) + g(a) = g\left(\frac{a_n}{a}\right) + g(a) \to g(a)$, probando que g es continua en 1 **(0.5 pts.)**.

(c) Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g(x) - h(x)$ **(0.5 pts.)**. Como g y h son continuas en $[0,1]$ por álgebra de funciones continuas sabemos que $g - h$ es una función continua en $[0,1]$ **(0.5 pts.)**. Usando los valores $g(1) = 0$ y $h(0) = 0$, y el hecho que $h[0,1] \subseteq [0,1]$ y $g[0,1] \subseteq [0,1]$ tenemos que $f(0) = g(0) - h(0) = g(0) \geq 0$ **(0.5 pts.)** y que $f(1) = g(1) - h(1) = -h(1) \leq 0$ **(0.5 pts.)**. El Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $g(c) = h(c)$ **(0.5 pts.)**.

Problema 3. Dado $a \geq 0$, sea $f_a(x) = ax^3 + x - 1$.

(a) (3 pts.) Demuestre la existencia y unicidad de $z \in [0,1]$ tal que $f_a(z) = 0$.

(b) (3 pts.) Sea $g : [0, \infty) \to [0,1]$ la función que a cada $a \geq 0$ le asocia la solución $z \in [0,1]$ de $f_a(z) = 0$. Pruebe que g es continua.

Indicación: Puede ser útil demostrar que si

$$\begin{aligned} au^3 + u - 1 &= 0 \\ bv^3 + v - 1 &= 0 \end{aligned}$$

con $a, b \geq 0$, entonces:

$$[b(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) = u^3(b - a) \tag{1}$$

Solución:

(a) Probemos primero la existencia. Tenemos que $f_a(0) = -1$ y $f_a(1) = a \geq 0$ **(0.5 pts.)**, y como f_a es continua **(0.5 pts.)**, el Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe $z \in [0, 1]$ tal que $f_a(z) = 0$ **(0.5 pts.)**.

Para la unicidad, podemos utilizar (1) con $a = b$ para concluir que si $u, v \in [0, 1]$ son soluciones de la ecuación $f_a(x) = 0$ entonces $[a(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) = 0$ **(0.5 pts.)**. Pero $a, u, v \geq 0$, de modo que $a(u^2+uv+v^2)+1 \geq 1$ y en consecuencia para que lo anterior sea cierto necesariamente $u = v$ **(0.5 pts.)**.

Finalmente, probamos la indicación. Restando las dos ecuaciones se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= au^3 - bv^3 + u - v \\ &= au^3 - bu^3 + bu^3 - bv^3 + u - v \\ &= u^3(a - b) + b(u^3 - v^3) + u - v \\ &= u^3(a - b) + b(u - v)(u^2 + uv + v^2) + u - v \\ &= u^3(a - b) + [b(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) \end{aligned}$$

de donde se sigue (1) **(0.5 pts.)**.

(b) Sea $a \geq 0$, P.D.Q. g es continua en a. Sea (a_n) una sucesión con valores en $[0, \infty)$ **(0.5 pts.)** y convergente al real a. P.D.Q. $g(a_n) \to g(a)$ **(0.5 pts.)**. Usando la propiedad (1) con a y $b = a_n$ queda

$$[a(g(a)^2 + g(a)g(a_n) + g(a_n)^2) + 1](g(a_n) - g(a)) = g(a_n)^3(a_n - a),$$

de donde

(1.0 pto.) $$|g(a_n) - g(a)| = \frac{g(a_n)^3}{a(g(a)^2 + g(a)g(a_n) + g(a_n)^2) + 1}|a_n - a| \leq |a_n - a|.$$

Luego, como $a_n \to a \Rightarrow |a_n - a| \to 0$, por sandwich de sucesiones, resulta que $|g(a_n) - g(a)| \to 0$, es decir $g(a_n) \to g(a)$ **(1.0 pto.)**.