Pauta Control #3 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

Puntuación: P1.- (i)2, (ii)2, (iii)2, P2.- (ia)2, (ib)2, (ii)2, P3.- (i)1.5, (ii)1.5, (iii)1.5, (iv)1.5.

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- Sea $a > 0$. Considere la sucesión definida por

$$\begin{cases} s_1 = 2a, \\ s_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a^3 + s_n^2}{a+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

(i) Demuestre por inducción que $s_n > a$, $\forall n \geq 1$.

(ii) Demuestre que s_n es estrictamente decreciente y convergente a un real L.

(iii) Encuentre el valor de L. Justifique rigurosamente su resultado.

Pauta.- **(i)** Para $n = 1$ es cierto que $s_1 = 2a > a$ [**0/0.25/0.5pto**].
Si suponemos que $s_n > a$ entonces

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a+1}} \\ &> \sqrt{\frac{a^3 + a^2}{a+1}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2(a+1)}{a+1}} \\ &= a \end{aligned}$$

[**0/0.5/1/1.5pto**].

(ii) Demostraremos que $s_{n+1} - s_n < 0$, en efecto

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2}}{\sqrt{a+1}} - s_n \\ &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2} - s_n\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} \\ &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2} - \sqrt{s_n^2\, a + s_n^2}}{\sqrt{a+1}} \\ &< 0, \end{aligned}$$

pues de la parte **(i)** se ve que $s_n^2\, a > a^3$ [**0/0.5/1.0/1.5pto**] (obviamente esta cota es posible obtenerla con otras manipulaciones algebraicas). Como s_n es decreciente y acotada inferiormente es en consecuencia convergente a un real L [**0/0.5pto**].

(iii) Ya que s_{n+1} es una subsucesión de s_n, ella es también convergente al mismo límite L **[0/0.25pto]**. Tomando límite en la expresión que define la sucesión se obtiene:

$$L = \frac{\sqrt{a^3 + L^2}}{\sqrt{a+1}}$$

[0/0.25/0.5/0.75/1pto] de donde $L^2(a+1) = a^3 + L^2$ y se deduce que $L^2 = a^2$ o bien $L = \pm a$ **[0/0.25/0.5pto]**. Ahora como $s_n > a$ entonces $L \geq a$ de donde se deduce que la única posibilidad es $L = a$ (el límite es único) **[0/0.25pto]**.

P2.- Sea $a > 0$.

(i) **Utilizando** las desigualdades

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \qquad \forall x < 1, \qquad 1 + x \leq \exp(x) \qquad \forall x \in I\!R,$$

estudie en los dos casos siguientes la convergencia de la sucesión

$$\exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right).$$

(a) Si $s_n \to a$ con $s_n < a$,

(b) Si $s_n \to -a$ con $s_n > -a$.

(ii) Determine si existen valores de α y de β para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{x}{a^2 - x^2}\right) & \text{si} \quad -a < x < a \\ \alpha & \text{si} \quad x \leq -a \\ \beta & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

sea continua en $x = -a$ y/o $x = a$. Justifique claramente su respuesta.

Indicación: en esta parte puede usar la caracterización de continuidad por sucesiones o por límites.

Pauta.(i)(a) Utilizaremos la primera desigualdad. Primero verificamos que

$$-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} < 1$$

para n suficientemente grande. En efecto, como $s_n \to a$, $s_n < a$ y $-a < a$ entonces para n suficientemente grande $-a < 0 < s_n < a$, entonces $-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} < 0 < 1$ para n grande **[0/0.25/0.5pto]** (también se puede argumentar deduciendo que $-\frac{s_n}{a^2-s_n^2} \to -\infty$). En seguida, aplicando la primera desigualdad (y que $\exp(x) \geq 0$, $\forall x \in I\!R$) tenemos

$$0 \leq \exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right) \leq \frac{s_n(a^2 - s_n^2)}{a^2 - s_n^2 + s_n}.$$

Por álgebra de límites de sucesiones, el término de la derecha tiende a $\frac{a(a^2-a^2)}{a^2-a^2+a} = 0$. Utilizando el Teorema de comparación para sucesiones (sandwich) se obtiene que la sucesión estudiada es convergente a cero **[0/0.5/1/1.5pto]**.

(i)(b) De la segunda desigualdad

$$1-\frac{s_n}{a^2-s_n^2}\leq \exp\left(-\frac{s_n}{a^2-s_n^2}\right).$$

Por álgebra de límites, el lado izquierdo diverge a $+\infty$ (el signo hay que justificarlo, por ejemplo notar que como $s_n \to -a$, $s_n > -a$ y $-a < a$ entonces para n suficientemente grande $-a < s_n < 0 < a$ de donde $1-\frac{s_n}{a^2-s_n^2} > 0$ para n grande, o bien explicar que $s_n^2 \to a^2$ con $s_n^2 > a^2$ y deducir por álgebra de límites divergentes que $\frac{s_n}{a^2-s_n^2} \to -\infty$ [**0/0.25/0.5pto**]), de donde por comparación (sandwich) se obtiene que el límite pedido es $+\infty$ [**0/0.5/1/1.5pto**].

(ii) Esta parte se puede resolver utilizando sucesiones o límites laterales de funciones. Se dan ambas opciones en la pauta.

- **Opción sucesiones:** Sea s_n una sucesión convergente a $x=-a$ con $s_n \leq -a$, es claro de la definición de f que

$$f(s_n)=\alpha\to\alpha \quad \text{si } n\to\infty.$$

Sea ahora s_n una sucesión convergente a $x=-a$ con $s_n > -a$, es claro de la parte **(i)(b)** que

$$f(s_n)\to+\infty \quad \text{si } n\to\infty.$$

Entonces f es no puede ser continua en $x=-a$ para ningún valor de α.
[**0/0.25/0.5/0.75/1pto**].
Sea s_n una sucesión convergente a $x=a$. Esta sucesión la separamos en dos: la de los términos mayores o iguales que a y la de los términos menores que a. Si los términos mayores o iguales que a son un número finito, no los consideramos, si son un número infinito, constituyen una subsucesión de s_n denotada $s_{n'}$. Lo mismo para los términos menores, que de ser infinitos denotamos por la subsucesión $s_{n''}$. Es claro de la definición de f que

$$f(s_{n'})=\beta\to\beta \quad \text{si } n'\to\infty$$

y de la parte **(i)(a)**

$$f(s_{n''})\to 0 \quad \text{si } n''\to\infty.$$

Entonces f es continua en $x=a$ para $\beta=0$. [**0/0.25/0.5/0.75/1pto**] (el hecho de no tomar una sucesión general, sino sólo dos convergentes por cada lado de $x=a$ y no justificar que esto es equivalente a tomar una general convergiendo por ambos lados a $x=a$ vale **0.25ptos**).

- **Opción límites laterales:** Para que f sea continua en $x=-a$ es necesario que

$$\lim_{x\to -a^-} f(x)=\lim_{x\to -a^+} f(x).$$

Pero

$$\lim_{x\to -a^-} f(x)=\alpha$$

y

$$\lim_{x\to -a^+} f(x) = +\infty$$

pues $\lim_{x\to -a^+} -\frac{x}{(a+x)(b-x)} = +\infty$ y $\exp(y) \to +\infty$ si $y \to +\infty$. Entonces f es no puede ser continua en $x = -a$ para ningún valor de α. **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]**.
Para que f sea continua en $x = b$ es necesario que

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^+} f(x).$$

Pero

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = \beta$$

y

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$$

pues $\lim_{x\to b^-} -\frac{x}{(a+x)(b-x)} = -\infty$ y $\exp(y) \to 0$ si $y \to -\infty$. Entonces f es continua en $x = b$ para $\beta = 0$. **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]** (el hecho de mencionar en alguno de los dos puntos que f es continua ssi los límites laterales existen y son iguales vale **0.25ptos**).

P3.- Definimos la función en $I\!R$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(i) Verifique que tanh es continua en todo $I\!R$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1$, $\forall x \in I\!R$.

(ii) Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $\tanh(n) \to 1$ y que $\tanh(-n) \to -1$.

(iii) **Usando** el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (T.V.I.) demuestre que $\forall y \in]-1,1[$, $\exists x \in I\!R$ tal que $\tanh(x) = y$.
Indicación: analice separadamente los casos $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.

(iv) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $I\!R$.
Indicación: use nuevamente el T.V.I.

Pauta.- **(i)** Notemos que $e^x + e^{-x} > 0$, $\forall x \in I\!R$, de modo que el denominador de tanh no se anula jamás y resulta ser continua por ser de la forma f/g con f y g continuas (suma de continuas) y $g(x) \neq 0$ **[0/0.25/0.5pto]**. Por otro lado $\tanh(0) = (1-1)/(1+1) = 0$ y

$$e^{-x} + e^{-x} > 0 \Rightarrow -e^{-x} < e^{-x} \Rightarrow e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$$

$$e^x + e^x > 0 \Rightarrow -e^x < e^x \Rightarrow -e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x}$$

de donde se obtiene $-1 < \tanh(x) < 1$ al dividir por $e^x + e^{-x} > 0$. **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]**.

(ii) Si $n \to \infty$ entonces $e^{-2n} \to 0$, de donde por álgebra de límites **[0/0.25/0.5/0.75pto]**:

$$\lim_{n\to\infty} \tanh(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = 1.$$

(Alternativamente, se puede demostrar de manera similar que $\lim_{x\to+\infty}\tanh(x) = 1$ y y tomar $x = n$).

Del mismo modo **[0/0.25/0.5/0.75pto]**:

$$\lim_{n\to\infty}\tanh(-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}-e^{n}}{e^{-n}+e^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-2n}-1}{e^{-2n}+1} = -1.$$

(Alternativamente, se puede demostrar de manera similar que $\lim_{x\to-\infty}\tanh(x) = -1$ y tomar $x = -n$). También se puede deducir usando el límite precedente y argumentando que $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ (función impar).

(iii) Sea $0 < y < 1$, como $\tanh(n) \to 1$ y $\tanh(n) < 1$ (o bien como $\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = 1$), entonces para n suficientemente grande $y < \tanh(n) < 1$, esto es existe n_0 tal que $y < \tanh(n_0) < 1$. Por otro lado $\tanh(0) = 0$. Entonces

$$\tanh(0) < y < \tanh(n_0).$$

Como tanh es continua, por el T.V.I. existe $x \in (0, n_0)$ tal que $\tanh(x) = y$ **[0.7pto]**.

Sea $-1 < y < 0$, como $\tanh(-n) \to -1$ y $-1 < \tanh(-n)$ (o bien como $\lim_{x\to-\infty}\tanh(x) = -1$), entonces para n suficientemente grande $-1 < \tanh(-n) < y$, esto es existe n_1 tal que $\tanh(-n_1) < y$. Por otro lado $\tanh(0) = 0$. Entonces

$$\tanh(-n_1) < y < \tanh(0).$$

Como tanh es continua, por el T.V.I. existe $x \in (-n_1, 0)$ tal que $\tanh(x) = y$ **[0.7pto]**. (También se puede argumentar usando la imparidad).

Si $y = 0$ claramente $\tanh(0) = y$ **[0/0.1pto]**.

(iv) Como $\cos(2k\pi) = 1$ y $\cos((2k+1)\pi) = -1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $\cos(2k\pi) - \tanh(2k\pi) > 0$ y $\cos((2k+1)\pi) - \tanh((2k+1)\pi) < 0$, esto es, la función continua $\cos(x) - \tanh(x)$ cambia de signo en cada intervalo $[2k\pi, (2k+1)\pi]$. Usando el T.V.I., existe $x_k \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ con $\cos(x_k) - \tanh(x_k) = 0$, esto es $\cos(x_k) = \tanh(x_k)$ y por lo tanto $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ constituyen una sucesión de raíces reales distintas de la ecuación. **[1.5pto]**.

Nota: los puntajes del tipo **[0/0.5/1pto]** significan que en lo posible la puntuación tomará solamente esos valores.

Atte, el Coordinador.