U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control #3 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 01/08 18:00 y 19:00). Esta se puede obtener en `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf. Nota: en la revisión se aceptará solamente tomar nota con lápiz de color verde.

P1.- **(i)** (3 ptos.) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(ii) (3 ptos.) Calcule

$$\lim_{x\to a} \frac{\arcsin x - \arcsin a}{x - a}$$

en función de a, usando el cambio de variables $u = \arcsin x - \alpha$, donde $\alpha = \arcsin a$. Indicación: puede serle útil la fórmula del seno de la suma.

Pauta.- **(i)**

- **Continuidad para $x \neq 0$.** Claramente f es una función continua en los intervalos: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ por álgebra de funciones continuas (la suma, producto, división si el denominador no se anula y composicion de funciones continuas es continua).
- **Continuidad por la derecha en $x = 0$.** Por límites laterales, podemos calcular:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

  - Método 1: usando los límites conocidos vistos en clases:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

  En efecto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

  - Método 2: otro método, mucho más largo pero instructivo, es utilizar las desigualdades fundamentales de las funciones exponencial y logaritmo vistas en clases:

$$x + 1 \leq e^x \leq \tfrac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$$
$$\tfrac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1 \quad \forall y > 0.$$

De la primera, restando 1 se obtiene que

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x},$$

de la segunda, tomando $y = 1 + x$ (si $x > -1$ entonces $y > 0$) se tiene que

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(1+x)} \leq \frac{1+x}{x}$$

pues los términos comparados son positivos.
Combinando lo anterior se obtienen las cotas siguientes:

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \leq \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \leq \frac{x}{1-x}\frac{1+x}{x} = \frac{1+x}{1-x},$$

que son validas para $-1 < x < 1$. Del teorema de comparación (Sandwich), tomando límite cuando $x \to 0^+$ se deduce que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1.$$

Cualesquiera de los dos métodos anteriores indica que el valor de β debe ser necesariamente:

$$\beta = 1.$$

- **Continuidad por la izquerda en $x = 0$.** Calculemos el límite:

$$\lim_{x \to 0^-} (x - \alpha)^2.$$

Por álgebra de límites (o por continuidad de los polinomios), es directo que este límite existe $\forall \alpha \in I\!\!R$ y vale α^2.
Imponiendo la restricción de continuidad en 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

se obtiene la condición

$$1 = \alpha^2$$

de donde

$$\alpha = 1 \text{ o bien } \alpha = -1.$$

(ii) Notemos primero que

$$\begin{aligned} u &= \arcsin x - \alpha \Rightarrow x = \sin(u + \alpha) \\ a &= \arcsin \alpha \Rightarrow \alpha = \sin a, \end{aligned}$$

de donde

$$x \to a \Rightarrow u \to 0.$$

Haciendo el cambio de variables el límite pedido queda entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{\arcsin x-\arcsin a}{x-a}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin(u+\alpha)-a}.$$

Calculemos este último límite utilizando la indicación (seno de la suma):

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin(u+\alpha)-a} &= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\cos\alpha\sin\, u+a\cos\, u-a}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\cos\alpha\frac{\sin\, u}{u}+a\frac{\cos\, u-1}{u}}\\ &= \frac{1}{\cos\alpha},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el álgebra de límites y los límites trigonométricos conocidos:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin\, u}{u}=1\qquad \lim_{u\to 0}\frac{\cos\, u-1}{u}=0.$$

Finalmente, como

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

se obtiene

$$\lim_{x\to a}\frac{\arcsin x-\arcsin a}{x-a}=\frac{1}{\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}}.$$

Asignación de puntaje P1:

(i)	**[0.5pto]**	Justificar continuidad para $x\neq 0$
	[1pto]	Cálculo del límite
	[0.5pto]	Encontrar β por continuidad
	[0.5pto]	Cálculo del límite con α
	[0.5pto]	Encontrar valores de α por continuidad
(ii)	**[0.5pto]**	Buen despeje de x y reescritura del límite
	[0.5pto]	Ver bien que si $x\to a$ entonces $u\to 0$
	[0.5pto]	Utilización seno de la suma
	[0.5pto]	Utilización de límites trigonométricos
	[0.5pto]	Valor del límite en α
	[0.5pto]	Reescritura en a

P2.- **(i)** (3 ptos) Sean $f,g:[0,1]\to[0,1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que $\exists c\in[0,1]$ tal que $f(c)=g(c)$. Indicación: analice los valores de g en los puntos donde f alcanza sus valores extremos.

(ii) (3 ptos) El objetivo de este problema es probar que toda función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq|x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\exists a\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(a)\leq f(x).$$

Para ello considere $y_0=f(0)$ y el intervalo $I=[-y_0,y_0]$.

(a) (1.5 ptos) Demuestre que

$$\forall x \in I\!R \setminus I, \quad f(x) > y_0.$$

(b) (1.5 ptos) Concluya que f alcanza su mínimo en $I\!R$ en un punto de I.

Pauta.- **(i)** Sea $h = f - g$ que también es una función continua en $[0, 1]$ (pero no necesariamente epiyectiva!). Debemos probar que $\exists c \in [0, 1]$ tal que $h(c) = 0$. Para ello la idea es usar el TVM para h,

Usamos la indicación: como f es epiyectiva, el valor máximo que toma es 1 digamos en algún $x_1 \in [0, 1]$. Del mismo modo, el mínimo valor que toma es 0 en algún $x_0 \in [0, 1]$. Por otro lado $0 \leq g(x) \leq 1$ $\forall x \in [0, 1]$, de donde

$$g(x_1) \leq 1 = f(x_1) \quad \text{y} \quad g(x_0) \geq 0 = f(x_0).$$

Esto es, probamos que

$$\exists x_1, x_0 \in [0, 1] \text{ tales que } \quad h(x_1) \leq 0, \quad h(x_0) \geq 0$$

y del TVM se concluye la propiedad.

(iia) Tenemos que

$$x \in I\!R \setminus I \;\Rightarrow\; |x| > y_0$$

pero

$$f(x) \geq |x|$$

de donde por transitividad

$$f(x) > y_0.$$

(iib) f es continua en I (intervalo cerrado y acotado) por lo que alcanza su mínimo en I, esto es:

$$\exists a \in I \quad \text{tal que} \quad f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in I.$$

Fuera de I, el punto a sigue siendo un mínimo, en efecto, como $0 \in I$, entonces:

$$f(a) \leq f(0) = y_0$$

y de la parte anterior se deduce que

$$f(a) \leq y_0 < f(x) \quad \forall x \in I\!R \setminus I.$$

Nota: esta pregunta también se puede hacer con un intervalo $[-y, y]$ donde y está en la imagen de f, pero en ese caso adicionalmente hay que probar que se puede escoger una preimagen de y en I (lo que no es necesario si la preimagen es 0). También se puede hacer por reducción al absurdo, pero es complicado: si f no tiene mínimo, al menos tiene ínfimo porque es acotada inferiormente (es positiva). Sea a_n una sucesión tal que $f(a_n)$ converja al ínfimo, entonces o bien a_n es acotada, en cuyo caso pasando al límite en una subsucesión se ve que el ínfimo se alcanza en el límite de esta subsucesión, o bien es no acotada, caso en que tomando límite se viola la desigualdad $f(a_n) \geq |a_n|$.

Asignación de puntaje P2:

(i)	**[0.5pto]**	Entender que se trata de TVM
	[0.75pto]	Existencia de valores máximos y mínimos de f
	[0.75pto]	Utilizar las cotas para g
	[1pto]	Utilizar bien el TVM
(iia)	**[0.5pto]**	Transcripción a desigualdad de $x \in \mathbb{R} \setminus I$
	[0.5pto]	Uso de la hipótesis $f(x) \geq \vert x \vert$
	[0.5pto]	Uso de la parte anterior
(iib)	**[1pto]**	Teorema f alcanza su mínimo en $[a, b]$
	[0.5pto]	Utilizar la parte anterior

P3.- **(i)** (3 ptos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demostrar que $\exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $\ell = f(\overline{x})$.

(ii) **(a)** (1 pto) Sea $k \in \mathbb{N}$. Usando subsucesiones, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n.$$

(b) (2 ptos) Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n+a}\right).$$

Use este resultado para concluir el valor de $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^n$.

Pauta.- **(i)** Del teorema de Bolzano Weierstrass, existe una subsucesión $a_{\varphi(n)}$ de a_n que es convergente. Llamando $\overline{x}$ al límite tenemos

$$a_{\varphi(n)} \to \overline{x}.$$

Pero por continuidad de f:

$$f(a_{\varphi(n)}) \to f(\overline{x}).$$

Ahora notemos que

$$f(a_{\varphi(n)}) \quad \text{es una subsucesión de} \quad f(a_n)$$

por lo que por hipótesis

$$f(a_{\varphi(n)}) \to \ell.$$

Finalmente, por unicidad del límite

$$f(\overline{x}) = \ell.$$

(iia) Dado $k \in \mathbb{N}$ fijo, y si sabemos que

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

tomamos la subsucesión $a_{\varphi(n)}$ con $\varphi(n) = n + k$ para obtener que

$$a_{n+k} \to e.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{-k}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{-k}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k} \\
&= 1^{-k}\lim_{n\to\infty} a_{n+k} \\
&= e
\end{aligned}$$

(iib) Se sabe de clases que

$$s_n \to 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+s_n)}{s_n} = 1$$

lo que viene de la desigualdad vista en clases:

$$\frac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1 \quad \forall y > 0.$$

Entonces reescribimos el primer límite pedido como

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+a}\,\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)}{\frac{1}{n+a}}$$

y es claro que

$$s_n = \frac{1}{n+a} \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{n}{n+a} \to 1$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+a}\,\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)}{\frac{1}{n+a}} = 1.$$

El límite pedido puede obtenerse de la continuidad de la función exponencial (tercera igualdad):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\,\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)\right) \\
&= \exp\lim_{n\to\infty} n\,\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right) \\
&= \exp 1 \\
&= e.
\end{aligned}$$

Valor que coincide con el límite calculado en el ítem anterior en el caso particular en que a es natural.

Asignación de puntaje P3:

(i)	**[1pto]**	Uso teorema de Bolzano Weierstrass
	[1pto]	Continuidad de f
	[0.5pto]	Subsucesiones y uso de la hipótesis
	[0.5pto]	Unicidad del límite
(iia)	**[0.2pto]**	Elección de la subsucesión correcta
	[0.3pto]	Saber que la subsucesión conserva el mismo límite
	[0.5pto]	Calculo del límite haciendo aparecer la subsucesión
(iib)	**[0.5pto]**	Entender que se trata del primer límite del logaritmo para un $s_n \to 0$
	[0.5pto]	Primer límite pedido
	[0.5pto]	Segundo límite pedido
	[0.5pto]	Comentar que la continuidad de exp permite intercambiar los límites