Departamento de Ingeniería Matemática
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Pauta Control 3, MA12A, Otoño 1996

Problema 1. Calcule el límite de las siguientes sucesiones

1. **(1.5 pts.)** $U_n = \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, $0 < a \leq b$. Distinga los casos $a = b$ y $a < b$. Para el caso $a = b$ la sucesión es constante igual a $\frac{1}{a}$. Luego, su límite es $\frac{1}{a}$. En el caso $a < b$ dividamos por b^n en el numerador y en el denominador. Entonces, se obtiene que $U_n = \frac{(\frac{a}{b})^n+1}{a(\frac{a}{b})^n+b}$. Como el límite de $(\frac{a}{b})^n$ es cero se concluye que el l'ımite de U_n es $\frac{1}{b}$.

2. **(1.5 pts.)** $U_n = (1 - \frac{1}{n-2})^{n+4}$.

   La sucesión U_n se puede escribir como el producto de la sucesión $(1 - \frac{1}{n-2})^{n-2}$ y la sucesión $(1 - \frac{1}{n-2})^6$. La primera es una subsucesión de la sucesión $(1 - \frac{1}{n})^n$ que converge a e^-1. La segunda es una potencia de una sucesión que converge a 1. Aplicando el álgebra de límites concluimos que U_n converge a e^{-1}.

3. **(1.5 pts.)** $U_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

   Racionalizando, se obtiene que $U_n = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}$. Como el límite de la sucesión $\frac{1}{\sqrt{n}}$ es cero, se concluye que el límite de U_n es 1.

4. **(1.5 pts.)** $U_n = \frac{n-sen(n)}{n^2-16}$.

   Separamos la sucesión en la diferencia de dos sucesión: $\frac{n}{n^2-16}$ y $\frac{sen(n)}{n^2-16}$. La primera es convergente a cero y la segunda es el producto de una sucesión acotada por una que converge a cero, y por lo tanto converge a cero. Así, U_n converge a cero.

Problema 2.

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones definidas por la recurrencia

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n}$$

con $a_0 > b_0 > 0$.

1. **(2.0 pts.)** Pruebe que (a_n) es decreciente. Concluya que (b_n) es decreciente.

   Claramente, $b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n} = \frac{b_0}{a_0} a_{n+1}$ y entonces $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_0}{a_0}$.

   Calculemos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} < 1$. Así, (a_n) es decreciente. Además, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ y entonces (b_n) es decreciente.

2. **(2.0 pts.)** Muestre que (a_n) y (b_n) son acotadas inferiormente. Concluya que (a_n) y (b_n) son convergentes.

   Todos los términos de (a_n) y (b_n) son positivos de modo que ambas sucesiones están acotadas inferiormente por 0. Por lo tanto, ambas convergen a límites a y b respectivamente.

3. **(2.0 pts.)** Calcule los límites de (a_n) y (b_n).

   Usando la relaciónde recurrencia tenemos que a y b satisfacen:

   $$a = \sqrt{ab} \qquad b = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{ab}$$

   La primera igualdad tiene como solución $a = 0$ o $a = b$. Si $a = 0$ entonces de la segunda ecuación sabemos que $b = 0$. Si $a = b$ de la segunda ecuación sabemos que $b = \frac{b_0}{a_0} b$ y por lo tanto $a = b = 0$. Así, la única solución es $a = b = 0$.

Ind: Para probar que (a_n) es decreciente muestre que $\forall n \;\; \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Para ello observe que $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_0}{a_0}$.

Problema 3.

1. Analice la convergencia de las siguientes sucesiones, estudiando sus puntos de acumulación.

   (a) **(1.0 pto.)** $(1+\frac{1}{n})^{(-1)^n n}$.

   La subsucesión $(1+\frac{1}{2n})^{(-1)^{2n}2n}$ converge a e y la subsucesión $(1+\frac{1}{2n+1})^{(-1)^{2n+1}2n+1}$ converge a e^{-1}. Por lo tanto la sucesión no converge.

   (b) **(1.0 pto.)** $cos(\frac{n\pi}{2})$.

   La subsucesión $cos(\frac{(4n)\pi}{2})$ es la sucesión constante igual a 1. La subsucesión $cos(\frac{(2n+1)\pi}{2}) = cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, por lo que su límite es cero. La subsucesión $cos(\frac{(4n+2)\pi}{2}) = cos(\pi) = -1$, y entonces convergente a -1. Teniendo tres puntos de acumulación la sucesión no converge.

   (c) **(1.0 pto.)** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$.

   Para n pares la suma anterior es 1 y para n impares es 0. Luego la sucesión admite a 1 y 0 como puntos de acumulación y entonces no converge.

2. (**3.0 pts.**) Sea (U_n) creciente y a un punto de acumulación. Pruebe que (U_n) es convergente y que $\lim U_n = a$.

   Veamos que a es cota superior. Supongamos que existe un n tal que $U_n > a$. Entonces como la sucesión es creciente, $\forall m \geq n\ U_m > a$. y a no puede ser un punto de acumulación. Así, U_n converge pues es acotada superiormente y creciente.

   Probemos ahora que $\lim U_n = a$. Sea $\epsilon > 0$. Como a es punto de acumulación, dado $m = 1$ existe un $n_0 \geq 1$ tal que $|U_{n_0} - a| < \epsilon$. Pero la sucesión es creciente y acotada superiormente por a entonces, $\forall n \geq n_0\ |U_n - a| < |U_{n_0} - a| < \epsilon$, es decir, U_n converge a a.

   Ind: Muestre que a es cota superior de (U_n).