Pauta Control #3 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre 2004-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0, \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\ln x} & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde a y b son parámetros reales con $a \neq 0$, $a \neq 1$.

a) (0.5 ptos.) ¿Qué puede decir de la continuidad de f en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$? Justifique.

b) (1.5 ptos.) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 0.

c) (1.5 ptos.) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 1.

d) (0.5 ptos.) Encuentre los valores de a y b, con $a \neq 0$, $a \neq 1$, tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

(ii) (2 ptos.) Estudie la continuidad en los puntos 0 y 1 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]x$. (Recuerde que $[x]$ es la parte entera de x, definida como el mayor entero k que cumple $k \le x$.)

Pauta. **(i)** **a)** La función f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ ya que en cada uno de éstos se puede aplicar los teoremas sobre álgebra y composición de funciones continuas. Sólo es necesario observar que en $(-\infty, 0)$ $\frac{\sin((1-a)x)}{x}$ es continua puesto que el denominador no se anula y en $(1, \infty)$ $\frac{\sin(a(x-1))}{\ln x}$ es continua.

b) Para estudiar la continuidad en 0 conviene calcular los límites laterales de f en este punto. Utilizando la definición de f y la hipótesis $a \neq 1$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin((1-a)x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin((1-a)x)}{(1-a)x}(1-a) \\ &= 1-a \end{aligned}$$

ya que $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$.
Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} b(x-a)^2 \\ &= ba^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, f es continua en 0 si y sólo si $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, es decir

$$1 - a = ba^2.$$

c) Calculemos los límites laterales de f en 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} b(x-a)^2 \\ &= b(1-a)^2. \end{aligned}$$

Suponiendo, como dice el enunciado, que $a \neq 0$ podemos calcular el otro límite del siguiente modo

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(a(x-1))}{\ln x} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(a(x-1))}{a(x-1)} \frac{a(x-1)}{\ln x}.\end{aligned} \tag{1}$$

Con el cambio de variables $y = z(x-1)$ vemos que $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(a(x-1))}{a(x-1)} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$. Por otro lado $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$, lo que se puede deducir del límite (más conocido quizá) $\lim_{z \to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$ con el cambio de variables $z = x - 1$. Luego

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = a.$$

Finalmente la continuidad de f en 1 es equivalente a $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ lo que es a su vez equivalente a

$$b(1-a)^2 = a.$$

d) En vista de las partes anteriores debemos buscar $a \neq 0$, $a \neq 1$ tales que

$$1 - a = ba^2 \qquad \text{y} \qquad b(1-a)^2 = a.$$

Reemplazando $1 - a = ba^2$ en la segunda ecuación se obtiene $b(ba^2)^2 = a$, luego $b^3a^4 = a$. Dividiendo por a (que suponemos distinto de cero) $b^3a^3 = 1$ de donde $ab = 1$. Volviendo a la primera ecuación $1 - a = a$ por lo que $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2$.

(ii) Estudiemos primeramente la continuidad de f en 0, para lo cual conviene recordar que

$$\lim_{x \to 0^-} [x] = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} [x] = 0. \tag{2}$$

En efecto, argumentando con sucesiones, si (x_n) es una sucesión tal que $x_n \to 0$, $x_n < 0 \quad \forall n$, vemos que $-1 < x_n < 0$ para n suficientemente grande por lo que $[x_n] = -1$. El otro límite es similar.
Utilizando los límites (2) vemos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [x]x = (-1) \cdot 0 = 0,$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [x]x = 0 \cdot 0 = 0,$$

Como $f(0) = 0$ concluimos que f es continua en 0.
Similarmente a (2) tenemos

$$\lim_{x \to 1^-} [x] = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} [x] = 1.$$

Así

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} [x]x = 0 \cdot 1 = 0 \neq f(1) = 1.$$

Esto muestra que f no es continua en 1.

Puntaje.

(i)	a)	0.5 ptos.	El puntaje es por argumentar que sobre los intervalos anteriores la función es cociente, producto, suma, resta y composición de funciones continuas. Se tiene que mencionar que en el caso del cociente se está dividiendo por una función que no se anula.
	b) y c)	0.4 ptos.	por mencionar que la continuidad se puede establecer estudiando límites laterales
		1 pto.	calcular correctamente los límites por la izquierda y por la derecha (0.5 cada uno)
		0.1 ptos.	plantear correctamente la ecuación
	d)	0.5 ptos.	por resolver correctamente
(ii)	a)	1 pto.	la continuidad en 0
		1 pto.	la continuidad en 1

Observaciones: Para los límites laterales en ib) e ic) se requiere conocer algunos límites básicos: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$ y $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$ y además identificar la estrategia correcta para el límite por la derecha en 1 (ver (1)). De los dos puntos asignados a esta parte se sugiere:

0.5 por conocer $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$
0.5 por conocer $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$
0.5 por usar la continuidad de $b(x-a)^2$
0.5 por el resto (básicamente hacer (1)).

P2.- Calcule los límites siguientes justificando apropiadamente (1 pto. cada uno):

(i) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}, \quad a \in \mathbb{R}$ **(ii)** $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x}$ **(iii)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a}, \quad a>0$ **(v)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}}$ **(vi)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n$

Pauta. **(i)**

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h^2}\, h = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Gracias a esto y el límite $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ obtenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \cos(a).$$

(ii) Mediante el cambio de variables $h = x - \pi$ vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h+\pi)}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho que $\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(iii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}\, \frac{x^2}{e^{x^2}-1}. \tag{3}$$

Recordemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

y observemos que haciendo $h = x^2$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} = 1,$$

por lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} = -\frac{1}{2}.$$

(iv) Racionalizando encontramos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a}\,\frac{\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a}}{\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^a-(1-x^a)}{x^a(\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a})} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^a}{x^a(\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a})} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a}}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Las funciones $g_1(x)=\sqrt{1+x^a}$ y $g_2(x)=\sqrt{1-x^a}$ son continuas en $[0,\infty)$ y $[0,1]$ respectivamente por álgebra y composición de funciones continuas. El único punto delicado podría ser $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0$ cuando $a>0$. Esto se deduce por ejemplo de $0 \le x^a \le x^{1/k} \quad \forall 0<x<1$ donde k es un natural tal que $\frac{1}{k}<a$ y del hecho (conocido) que $x^{1/k}$ es continua en $[0,\infty)$, siendo la inversa de la función $y \mapsto y^k$. Luego $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^a} = \lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^a} = 1$ y concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a} = 1.$$

(v) FORMA 1: Utilizando la definición de $\ln(x)$ y la propiedades de la la exponencial

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}} &= \lim_{x\to 1} \exp\Big(-\frac{x}{\ln(x)}\ln(x)\Big) \\
&= \lim_{x\to 1} \exp(-x) \\
&= e^{-1},
\end{aligned}$$

gracias a la continuidad de la función exponencial.

FORMA 2:

$$\ln(x^{-\frac{x}{\ln x}}) = -\frac{x}{\ln(x)}\ln(x) = -x.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 1} \ln(x^{-\frac{x}{\ln x}}) = \lim_{x\to 1} -x = -1.$$

De aquí se deduce que

$$\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}} = \exp(\lim_{x\to 1} \ln(x^{-\frac{x}{\ln x}})) = e^{-1}.$$

(vi) FORMA 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2n}{1+2n}\Big)^n &= \lim_{n\to\infty} \Big(1-\frac{n}{1+2n}\frac{1}{n}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{a_n}{n}\Big)^n
\end{aligned}$$

donde $a_n = -\frac{n}{1+2n}$ tiene límite $-\frac{1}{2}$. Es una propiedad usualmente vista en clases que en esta situación

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{a_n}{n}\Big)^n = \exp(\lim_{n\to\infty} a_n) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

FORMA 2: utilizando logaritmos y un cambio de variables

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x+2}\right)^{1/x} \qquad \left(x=\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{\log(\frac{2}{x+2})}{x}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\frac{2}{x+2})}{x}\right) \qquad \text{(continuidad de } \exp(\cdot))\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x+2}\cdot\frac{\log(\frac{2}{x+2})}{\frac{2}{x+2}-1}\right)\\
&= \exp\left(-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+2}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{\log t}{t-1}\right)\\
&= e^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Puntaje.

(i)	0.3 ptos.	por identificar y utilizar correctamente la *buena* identidad trigonométrica
	0.3 ptos.	$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$
	0.4 ptos.	por el resto
(ii)	0.6 ptos.	lo importante aquí es el cambio de variables
	0.4 ptos.	por el resto
(iii)	0.2 ptos.	reconocer el paso (3)
	0.2 ptos.	$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$
	0.2 ptos.	$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}$
	0.2 ptos.	$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$ (reconocer el límite anterior y hacer el cambio de variables)
	0.2 ptos.	por el resto
(iv)	0.3 ptos.	por la idea de racionalizar
	0.2 ptos.	por llegar a (4)
	0.4 ptos.	por argumentar que $\lim_{x\to 0}\sqrt{1\pm x^a}=1$
	0.1 ptos.	por el resultado correcto
(v)	0.5 ptos.	por la idea $x^{(*)}=e^{(*)\ln(x)}$
	0.5 ptos.	por argumentar que $\exp(\cdot)$ es continua, y la respuesta correcta
(vi)	0.5 ptos.	por llegar a la forma $\lim(1+\frac{1}{a_n})^n$
	0.3 ptos.	por recordar/mencionar $\lim(1+\frac{1}{a_n})^n=\exp(\lim a_n)$
	0.2 ptos.	por el valor del límite

Observaciones: en (vi) se planteó la pauta para la primera forma. Para la segunda el puntaje es aproximadamente 0.2 ptos. por cada paso en el desarrollo de esta pauta (son 6 pasos, por eso lo de *aproximadamente*).

P3.- **(i)** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$.

a) (2 ptos.) Pruebe que existen $\underline{x}$, $\overline{x}\in[a,b]$ tales que

$$f(\underline{x})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leq f(\overline{x}) \qquad \forall x_1,x_2\in[a,b].$$

b) (2 ptos.) Demuestre que dados x_1, $x_2\in[a,b]$ cualesquiera existe $\beta\in[a,b]$ tal que

$$f(\beta)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Indicación: utilice los teoremas sobre funciones continuas en un intervalo $[a,b]$.

(ii) (2 ptos.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$f(x) \leq 0 \quad \forall x \leq 0,$

$f(x) \geq 1 \quad \forall x > 0.$

Pruebe que f no es continua en cero.

Pauta. **(i)** **a)** La idea es escoger $\underline{x}$ como el mínimo de f y $\overline{x}$ como el máximo. En efecto, como f es continua en $[a, b]$ y $[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado, f alcanza su mínimo sobre $[a, b]$, es decir, existe $\underline{x} \in [a, b]$ tal que

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{5}$$

Del mismo modo f alcanza su máximo sobre $[a, b]$, es decir existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que

$$f(\overline{x}) \geq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{6}$$

Ahora sean x_1, $x_2 \in [a, b]$. Por la propiedad (5) tenemos que

$$f(x_1) \leq f(\overline{x}) \quad \text{y} f(x_2) \leq f(\overline{x})$$

y sumando

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}).$$

Similarmente por (6)

$$f(x_1) \geq f(\underline{x}) \quad \text{y} f(x_2) \geq f(\underline{x})$$

y sumando

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f(\underline{x}).$$

b) Si x_1, $x_2 \in [a, b]$ por la parte anterior sabemos que al definir $c = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ tenemos

$$f(\underline{x}) \leq c \leq f(\overline{x}).$$

Aplicando el teorema del valor intermedio a la función f sobre el intervalo $[\underline{x}, \overline{x}]$ si $\underline{x} \leq \overline{x}$ y sobre el intervalo $[\overline{x}, \underline{x}]$ en caso contrario deducimos que existe β en este intervalo tal que $f(\beta) = c$.

(ii) FORMA 1:

Si $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ no existe entonces f no puede ser continua en 0. Analicemos el caso en que este límite lateral existe. Entonces de la condición $f(x) \geq 1$ para todo $x > 0$ deducimos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq 1,$$

pero $f(0) \leq 0$ por lo que f no puede ser continua en 0.

FORMA 2: escogiendo la sucesión $1/n$ vemos que

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

o bien no existe, o si existe es mayor o igual que 1. Luego f no puede ser continua.

FORMA 3: eligiendo $\varepsilon = 1/2$ vemos que para todo $\delta > 0$ existe x con $|x| < \delta$ ($x = \delta/2$ sirve) tal que $f(x) = 1$, es decir

$$|f(x) - f(0)| \geq \varepsilon.$$

Puntaje.

(i)	a)	0.6 ptos.	por elegir (o darse cuenta) que $\underline{x}$ y $\overline{x}$ son el mínimo y máximo de f
		0.6 ptos.	por argumentar, citando el teorema correcto, que el mínimo y máximo de f sobre $[a, b]$ existen
		0.8 ptos.	deducir las desigualdades que se pide
	b)	0.5 ptos.	por mencionar el teorema del valor intermedio (y decir que f es continua, por lo que el teo. vale)
		0.5 ptos.	por darse cuenta que conviene aplicar el teorema en $[\underline{x}, \overline{x}]$ (en el caso $\underline{x} \leq \overline{x}$)
		0.5 ptos.	por verificar que $(f(x_1) + f(x_2))/2$ está en el rango apropiado (que es una de las hipótesis del teorema)
		0.5 ptos.	por un argumento ordenado
(ii)		0.7 ptos.	por elegir una sucesión o un valor de $\varepsilon > 0$ útil
		1.3 ptos.	por el resto del argumento

Observaciones: en (ia) los puntos $\underline{x}$ y $\overline{x}$ **tienen** que ser mínimo y máximo de f sobre $[a, b]$ respectivamente.

En (ii) hay gran variedad de formas de argumentar. Por lo que el puntaje descrito anteriormente es una sugerencia solamente.

De cualquier manera que se proceda es importante:

que esté presente la definición de continuidad, o propiedades equivalentes a ella (1 pto.),

que la lógica sea correcta (1 pto.).