Pauta Control #3 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/∼lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1

a) Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\beta}(1-e^x)\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

i) Justifique porque f es continua $\forall x \in I\!R - \{0\}$, $\forall \beta \in I\!R$.
f es continua en $I\!R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ porque en esos intervalos las funciones $|x|, e^x, \operatorname{sen} x, 1/x$ son continuas y se puede aplicar los teoremas sobre algebra y composición de funciones continuas. Observar que en $I\!R - \{0\}, 1/x$ o $|x|^{\beta}, \beta < 0$, no anulan sus denominales. **(1.0 pto.)**

ii) Para $\beta > -1$, probar que f es continua en $I\!R - \{0\}$.
f es continua en $I\!R - \{0\}$ para $\forall \beta \in I\!R$ segun (i).
Para estudiar la continuidad en $x = 0$ calculamos
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left\{|x|^{\beta}(1-e^x)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} \left\{|x|^{\beta+1}\ \frac{1-e^x}{|x|}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$ **(1.0 pto.)**
Observar que $\lim\limits_{x\to 0}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe, pero $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es acotada, $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq k$.
Además $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^x}{|x|} \to \mp 1$ según $x \to 0^+$ o $x \to 0^-$ y $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\beta+1} = 0$, si $\beta + 1 > 0$ es decir $\beta > -1$
En tal caso $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\beta+1}\ \frac{1-e^x}{|x|}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ lo que puede fundamentarse con

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{0} < \left| \underset{\substack{\downarrow\\0}}{|x|^{\beta+1}\ \frac{1-e^x}{|x|}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \right| < \underset{\substack{\downarrow\\0}}{|x|_0^{\beta+1}\left|\frac{1-e^x}{|x|}\right|k}$$

Como $f(0) = 0$ se concluye que f es continua en 0 si $\beta > -1$.
Es decir f es continua $\forall x \in I\!R$ si $\beta > -1$. **(1.0 pto.)**

iii) Para $\beta = -1$, utilice la sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ para probar que f no es continua en $x = 0$. Justifique.
La sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2} \to 0^+$ cuando $n \to \infty$ de modo que si f es continua en 0, debe cumplirse que $f(x_n) \to f(0) = 0$ (Para toda x_n t.q. $x_n \to 0$).
Pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|^{-1}(1-e^{x_n})\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad (\beta = -1)$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-e^{x_n}}{|x_n|}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-e^{x_n}}{x_n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)$ **(0.5 ptos.)**
en que $|x_n| = x_n$ pués $x_n \to 0^+$.
Pero $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-e^{x_n}}{x_n} = -1$ cuando $x_n \to 0$ y
$\lim\limits_{n\to\infty}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.$

Sigue que $f(x_n) \to -1$ con $x_n \to 0^+$.
Así $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1 \neq f(0) = 0$.
Se concluye que f no es continua en 0 si $\beta = -1$. **(0.5 ptos.)**

b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = ln\ a, a > 0$ y úselo para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{ln(1+x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ln\ a^x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ ln\ a}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ ln\ a}-1}{x\ ln\ a} \cdot ln\ a$.

Como $x\ ln\ a \to 0$ $\quad \lim \underbrace{\frac{e^{x\ ln\ a}-1}{x\ ln\ a}}_{\to 1} \cdot ln\ a = ln\ a$. **(1.0 pto.)**

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(a^x-1)-(b^x-1)}{ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{a^x-1}{x} - \frac{b^x-1}{x}}{\frac{ln(1+x)}{x}}$ en que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$.

Sigue que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{ln(1+x)} = \frac{ln\ a - ln\ b}{1} = ln\left(\frac{a}{b}\right)$. **(1.0 pto.)**

Problema 2

a) Para la función $f(x) = 1 + xe^{1/x}$, encuentre

i) Su asintota oblicua.

La asintota oblicua es de la forma $y = mx + n$ en que $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+xe^{1/x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + e^{1/x}) = 1$, puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ entonces $e^{1/x} \to e^0 = 1$ si $x \to \infty$. **(0.5 ptos.)**

Además $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + xe^{1/x} - x)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} [1 + x(e^{1/x} - 1)] = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x}$ en que $\frac{1}{x} \to 0$ entonces con $y = \frac{1}{x} \Rightarrow n = 1 + \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 + 1 = 2$.

Entonces la asintota oblicua es $\boxed{y = x + 2}$ **(1.0 pto.)**

ii) 1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}$ 3) Asíntotas verticales, si las hay.

1) $\lim\limits_{x\to 0^-} = \lim\limits_{x\to 0^-} (1 + xe^{1/x}) = 1 + 0 \cdot 0 = 1$ (pués $\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{1/x} \to 0$). **(0.5 ptos.)**

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1 + xe^{1/x}) = 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = 1 + \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{1/x}$.

Si $1/x = t$ entonces $t \to \infty$ cuando $x \to 0^+$.

Así $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{e^t}{t}$ pero $\frac{e^t}{t} > \frac{t^2}{t} = t \to \infty$. **(0.7 ptos.)**

De modo que $f(x) \to \infty$ si $x \to 0^+$.

3) Existe asintota vertical $x = 0$ (eje OY) por lo anterior. **(0.3 ptos.)**

iii) Demuestre que $\exists x_0 \in [-2, -1]$ t.q. $f(x_0) = 0$.

En efecto, f es continua en $[-2, -1]$ pués $1/x$ y $e^{1/x}$ lo son.

Además $f(-2) = 1 - 2e^{-1/2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} < 0 \quad (\sqrt{e} < 2)$

y $f(-1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0 \quad (e > 1)$ **(0.5 ptos.)**

Es decir $f(-2) \cdot f(-1) < 0$. Entonces por TEO. Valor Intermedio $\exists x_0 \in [-2, -1]$ tal que $f(x_0) = 0$.

(0.5 ptos.)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a|x| + \operatorname{sen} \pi x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Calcule los límites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y encuentre los valores de a y b para que f sea continua en $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ax + \operatorname{sen} \pi x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[a + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}\right] = a + \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$ en que $|x| = x$ pués $x \in I\!R^+$.

Además $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} = \pi \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} = \pi \cdot 1 = \pi$.

Entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a + \pi$. **(0.5 ptos.)**

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{-ax + \operatorname{sen} \pi x}{x}\right] = -a + \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} = -a + \pi$ **(0.5 ptos.)**

en donde $|x| = -x$ pués $x \in I\!R$.

Además, f es continua en 0 si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, es decir $\begin{cases} a + \pi = -a + \pi \\ a + \pi = b \end{cases}$

de donde $2a = 0 \Rightarrow \underline{a = 0} \quad \wedge \quad \underline{b = \pi}$ **(1.0 pto.)**

Problema 3

i) Sean f, g funciones continuas en $[a,b], a < b$ y tales que
$f(a) \neq f(b), f(a) = -g(b), f(b) = -g(a)$.
Pruebe que $\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n \;\; \wedge \;\; g(x) = -(b-x)^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para ese caso, el valor de $x_0 \in [a,b]$.
Definamos la función $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $H(x) = f(x) + g(x)$.
$H(x)$ es continua en $[a,b]$ puesto que f y g lo son.
Además $H(a) = f(a) + g(a) = f(a) - f(b) \qquad (g(a) = -f(b)$ por hipotesis)
$H(b) = f(b) + g(b) = f(b) - f(a) \qquad (g(b) = -f(a)$ por hipotesis).
Entonces como $f(a) \neq f(b), H(a)H(b) = -[f(a) - f(b)]^2 < 0$. **(1.0 pto.)**
Entonces H es tal que es continua en $[a,b] \;\; \wedge \;\; H(a) \cdot H(b) < 0$.
Así por TEO del Valor Intermedio (También Teorema de las Raíces)
$\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $H(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) + g(x_0) = 0$.
Es decir $\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $f(x_0) = -g(x_0)$. **(1.0 pto.)**
Además $f(x) = (x-a)^n \Rightarrow f(a) = 0 \;\; \wedge \;\; f(b) = (b-a)^n \neq 0 = f(a)$
$g(x) = -(b-x)^n \Rightarrow g(b) = 0 \;\; \wedge \;\; g(a) = -(b-a)^n$.
Entonces $f(a) = 0 = -0 = -g(b) \;\; \wedge \;\; f(b) = -g(a)$ con lo cual se cumplen las hipotesis originales.
Así $f(x_0) = -g(x_0) \Rightarrow$ en este caso, $(x_0 - a)^n = -[-(b - x_0)^n]$
$\Rightarrow (x_0 - a)^n = (b - x_0)^n / \sqrt[n]{} \Rightarrow x_0 - a = b - x_0$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{a+b}{2} \in [a,b]$$ **(1.0 pto.)**

ii) Considere F, G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$.
Demuestre que $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), F(x) < G(x)$.
Definamos $H(x) = G(x) - H(x)$ continuas en x_0 puesto que G y F lo son.
Además, $H(x_0) = G(x_0) - H(x_0) > 0$ por hipotesis. **(0.5 ptos.)**
Por propiedad puntual de las funciones continuas, $\exists \delta > 0$ t.q. $H(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, es decir H conserva el signo ($H(x_0) > 0$) en una vecindad de x_0.
Entonces $\exists \delta > 0$ t.q. $G(x) - F(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
o bien $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad F(x) < G(x)$. **(1.0 pto.)**
OBS. También puede abordarse con uso de sucesiones $u_n \to x_0 \;\; \wedge \;\; F(u_n) < G(u_n) \ldots$ etc.

iii) Si $h(x) = x^3 - x^2 + x$ demuestre que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(x_0) = 10$. Justifique.
$h(x)$ es un polinomio y por lo tanto continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
Por ejemplo $h(2) = 6 \;\; \wedge \;\; h(3) = 21$ **(0.5 ptos.)**
Así, $\qquad h(2) < 10 < h(3)$.
Entonces, por TEO Valor Intermedio, $[h(2), h(3)]$ es un intervalo, es decir, todo elemento de el tiene preimagen por h en $[2,3]$.
Así $\exists x_0 \in [2,3]$ t.q. $h(x_0) = 10$. **(1.0 pto.)**