Pauta Control #3 MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1

Pauta Problema 1

i) $\lim\limits_{x\to 1}\{(x-1)[log_x(a)+log_{x^2}(b)]\}$ $\quad a,b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ Considerando cambio de base

$$log_x(a)=\frac{\ell na}{\ell nx};log_{x^2}(b)=\frac{\ell nb}{\ell nx^2}=\frac{\ell nb}{2\ell nx}.$$

Reemplazando queda

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\left[\frac{\ell na}{\ell nx}+\frac{\ell nb}{2\ell nx}\right]=\lim_{x\to 1}(\ell na+\frac{1}{2}\ell nb)\frac{x-1}{\ell nx}$$

(0.5 ptos.)

pero $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ell nx}=\lim\frac{1}{(\frac{\ell nx}{x-1})}=\frac{1}{1}=1$ en que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ell nx}{x-1}$ es conocido.

Así $\lim\limits_{x\to 1}\{(x-1)[log_x(a)+log_{x^2}(b)]=\ell na+\frac{1}{2}\ell nb=\ell n(a\sqrt{b})$ (0.5 ptos.)

ii) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$; Escribiendo $x^{\frac{1}{x-1}}=e^{\ell nx^{\frac{1}{x-1})}}=e^{\frac{\ell nx}{x-1}}$, así, $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{\ell nx}{x-1}}$

y por la continuidad de la exponencial $=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ell nx}{x-1}}=e^1=e.$ (1.0 pto.)

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2-1}}{x^2}}$ por continuidad de $\sqrt{\ }$ y $\quad y=x^2\to 0$ si $x\to 0$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^y-1}{y}}=\sqrt{1}=1$ con $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$ conocido. (1.0 pto.)

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-1}{tgx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{tg(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{senx^2}\cdot cosx^2=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=-\frac{1}{2}$ usando
$\lim\frac{1-cosx}{x^2}=\frac{1}{2}\wedge\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$, conocidos (1.0 pto.)

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-n)^n}{(n-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{(\frac{n-1}{n})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$ en donde
$(1-\frac{1}{n})^n\to\frac{1}{e}$. Así $(-1)^n\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}\to\pm e$ según n sea par o impar. Por lo tanto
$\lim(-1)^n(\frac{n}{n-1}=)^n$ No existe (1.0 pto.)

vi) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4n-7}{4n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4n+1-8}{4n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{8}{4n+1})^n=\lim\sqrt[4]{(1-\frac{8}{4n+1})^{4n+1}(1-\frac{8}{4n+1})^{-1}}=$
$\sqrt[4]{\frac{1}{e^8}\cdot 1}=\frac{1}{e^2}$. Se usó continuidad de $\sqrt[4]{\ }$ y subsucesión del número e (1.0 pto.)

Pauta Problema 2

Sea $f : \mathbb{R} - \{1,4\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + \frac{x^3+1}{x-4}$

a) Estudie continuidad de f en su dominio. Justifique.
En $Dom f = \mathbb{R} - \{1,4\}$ las funciones
$\frac{x^2+1}{x-1}$ y $\frac{x^3+1}{x-4}$ son racionales bien definidas (denominador no nulo) y por lo tanto continuas. (1.0 pto.)
Así, f es suma de funciones continuas y por lo tanto continua en $\mathbb{R} - \{1,4\}$. (0.5 ptos.)

b) Es posible definir f en 1 y 4 de modo que sea continua?

1era. FORMA

Tanto en

$$x_0 = 1 \text{ y } x_0 = 4, \lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x\to 4} f(x) = \pm\infty$$

es decir f presenta discontinuidades infinitas de modo que NO ES POSIBLE definir f en 1 y 4 para que sea continua por la inexistencia de los límites. (1.5 ptos.)

2da. FORMA

También puede argumentarse usando sucesiones tales como $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ y $v_n = 4 - \frac{1}{n}$ con lo que $f(u_n) \to \infty$ y $f(v_n) \to -\infty$ aun cuando $u_n \to 1$ y $v_n \to 4$, lo que contradice el Teorema.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall u_n, u_n \to x_0, f(u_n) \to L$$

Es decir $\lim_{n\to\infty} f(u_n)$ NO EXISTE $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$ NO EXISTE

c) Pruebe que $\exists x_0 \in [2,3]$ tal que $f(x_0) = 0$.
Ya se sabe que f es continua en $[2,3] \subseteq Dom f$.
Además $f(2) = \frac{1}{2} > 0 \wedge f(3) = -23 < 0$, es decir $f(2)\cdot f(3) < 0$ es decir la función cambia de signo.
(1.0 ptos.)
Por aplicación del teorema del Valor Intermedio (TVI) (o TEO de Bolzano) cuyas hipótesis se cumplen.
$\exists x_0 \in [2,3]$ tal que $f(x_0) = 0$. (0.5 ptos.)

d) Demuestre que $[-23, \frac{1}{2}] \subseteq f([2,3])$.
Como $f(2) = \frac{1}{2} \wedge f(3) = -23 \Rightarrow [-23, \frac{1}{2}] = [f(3), f(2)]$.
Sea $d \in [-23, \frac{1}{2}] \Rightarrow d \in [f(3), f(2)]$. (0.5 ptos.)
Entonces por la continuidad de f y aplicación del TVI $\exists x_0 \in [2,3]$ t.q. $f(x_0) = d$.
Pero $f(x_0) \in f([2,3])$ pués $x_0 \in [2,3]$. Así $f(x_0) = d \in f([2,3])$ por lo tanto $[-23, \frac{1}{2}] \subseteq f([2,3])$.
(1.0 pto.)

Pauta Problema 3

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ ; f(x) = 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$$

a) f es continua y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$.

En efecto, las funciones $h(x) = 1$ y $g(x) = x+1$ son continuas en $\mathbb{R}^+$ (son polinómicas) y $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x+1}$ es continua al ser cuociente de continuas. (0.5 ptos.)

Así $f(x) = h(x) + \frac{1}{g(x)} = 1 + \frac{1}{x+1}$ es suma de continuas y luego continua. También, $h(x) = 1$ es decreciente y $g(x) = x+1$ es estrictamente creciente por lo que $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x+1}$ es estrictamente decreciente de modo que $f(x)$ es suma de funciones una decreciente y la otra estrictamente decreciente. Así, $f(x)$ es estrictamente decreciente. (0.5 ptos.)

b) $h = f \circ f$ es continua y creciente en $\mathbb{R}^+$.

En efecto, $f \circ f$ es composición de funciones continuas y por lo tanto es continua. (0.5 ptos.)

Además, como f es decreciente

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

es decir $x_1 < x_2 \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$, es decir $f \circ f$ es creciente. (0.5 ptos.)

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por $a_0 = 1, a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \geq 0$.

Verifiquemos que $a_0 < a_2 < a_3 < a_1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, a_1 = f(a_0) = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \\
a_2 &= f(a_1) = 1 + \frac{1}{1+3/2} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \\
a_3 &= f(a_2) = 1 + \frac{1}{1+7/5} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12} = 1{,}42
\end{aligned}$$

Así, $a_0 = 1 < a_2 = 1{,}4 < a_3 = 1{,}42 < a_1 = 1{,}5$ (0.5 ptos.)

Verifiquemos que $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Por inducción demostraremos que $a_{2n} < a_{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0,\ a_0 < a_2$ que es verdadero por lo anterior

Sea $a_{2n} < a_{2n+2}$ algún $n \in \mathbb{N}$

Por demostrar que $a_{2n+2} < a_{2n+4}$.

En efecto, aplicando $f \circ f$, creciente, a la hipótesis $a_{2n} < a_{2n+2}$ se tiene $a_{2n} < a_{2n+2} \Rightarrow f \circ f(a_{2n}) < f \circ f(a_{2n+2})$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad f(a_{2n+1}) < f(a_{2n+3})(\text{ de } a_{n+1} = f(a_n)) \\
&\Rightarrow \quad a_{2n+2}) < a_{2n+4}) \rightarrow \text{ Tesis}
\end{aligned}$$

(0.5 ptos.)

Análogamente para probar que $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

$$\begin{aligned}
& a_3 && < a_1 \text{ para } n = 0 \\
\text{y} \quad & a_{2n+3} && < a_{2n+1} \Rightarrow f \circ f(a_{2n+3} < f \circ f(a_{2n+1}) \Rightarrow a_{2n+5} < a_{2n+3}
\end{aligned}$$

De esta forma, $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ son tales que

$$a_0 < a_2 < a_4 < ... < a_{2n} < a_{2n+1} < ... < a_5 < a_3 < a_1$$

(0.5 ptos.)

Así, $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente por a_1, por ejemplo y $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente por a_0. (0.5 ptos.)

d) Se concluye que $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente y por lo tanto convergente.

También $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiomente y luego convergente. (0.3 ptos.)

Además $(f\circ f)\cdot(a_{2n}) = a_{2n+2}$ en que a_{2n+2} es subsucesión de $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y en consecuencia $a_{2n} \to L \Rightarrow a_{2n+2} \to L$

$\text{lím}(a_{2n+2}) = \text{lím}(f\circ f)(a_{2n}) = f\circ f(\text{lím}(a_{2n}))$ por la continuidad de $f\circ f$. Así

$$\begin{aligned} L &= f\circ f(L) = f(\frac{L+2}{L+1}) = \frac{\frac{L+2}{L+1}+2}{\frac{L+2}{L+1}+1} = \frac{3L+4}{2L+3} \\ &\Rightarrow L(2L+3) = 3L+4 \Rightarrow 2L^2+3L = 3L+4 \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Es decir $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}) = \sqrt{2}$ y análogamente $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n+1}) = \sqrt{2}$ (0.7 ptos.)

e) Probar, por definición que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$

$a_{2n} \to \sqrt{2}$ equivale a establecer $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n'_o \in \mathbb{N})(\forall n > n'_o), 2n > n'_o$

$\Rightarrow |a_{2n-\sqrt{2}}| < \varepsilon$.

Análogamente $a_{2n+1} \to \sqrt{2} \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n''_o \in \mathbb{N})(\forall n > n''_0), 2n+1 > n''_o$

$\Rightarrow |a_{2n+1} - \sqrt{2}| < \varepsilon$. (0.5 ptos.)

Así, $\forall n > \text{máx}\{n'_o, n''_o\}$ se cubren ambos casos y como $\forall n \in \mathbb{N}, n$ es par o impar, entonces $\forall n > \text{máx}\{n'_o, n''_o\} \Rightarrow |a_n - \sqrt{2}| < \varepsilon \Rightarrow a_n \to \sqrt{2}$. (0.5 ptos.)