Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 13 de Septiembre del 2001. Tiempo: 3,0 hrs.

PAUTA CONTROL 4

MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

Estudiar completamente la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^3+2x^2+x)}$ con $x \in \mathbb{R}$, indicando:

(a) (3.0 pts.) ceros, continuidad, eventuales reparaciones de discontinuidad, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos,

(b) (3.0 pts.) concavidad, puntos de inflexión, asíntotas, recorrido y gráfico.

Sol.:

(a) Notemos que $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2+2x+1)} = \sqrt[3]{x(x+1)^2}$.

Ceros: $x(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \lor x = -1$ (0.5 pts)

Continuidad: f es continua en su dominio pues es composición de funciones continuas ($\sqrt[3]{\cdot}$ compuesto con un polinomio) (0.5 pts)

Eventuales reparaciones de continuidad: ninguna.

Diferenciabilidad: vemos que si $x \neq 0 \land x \neq -1$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^3+2x^2+x)^{1/3}]' \\ &= \frac{1}{3}(x^3+2x^2+x)^{-2/3}(3x^2+4x+1) \\ &= \frac{(3x+1)(x+1)}{3(x^{1/3}(x+1)^{2/3})^2} \text{ (0.5 pts)} \end{aligned}$$

Crecimiento: tenemos que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow (x > -\frac{1}{3} \land x > -1) \lor (x < -1/3 \land x < -1) \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-\frac{1}{3},+\infty[$, donde f es estrictamente creciente.

Similarmente, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1,-\frac{1}{3}[$, donde f es estrictamente decreciente (0.5 pts).

Puntos críticos: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1/3$ ($x = -1$ no es pto crítico). Como f es estrictamente decreciente antes de $-1/3$ y estrictamente creciente después de $-1/3$, entonces $-1/3$ es un mínimo local (0.5 pts).

El análisis en $x = 0$ y $x = -1$ es más delicado pues hay que calcular f' por definición. Por una parte

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^3+2x^2+x}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+2/x+1/x^2} = +\infty.$$

Por otro lado,

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}}{x+1} = \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{x\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}} = \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}},$$

y como $\lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^-} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = +\infty$ luego la derivada f' no está definida en $x = 0$ ni en $x = -1$. Sin embargo, ff es estricatmente creciente antes de de -1 y estrictamente decreciente después de -1, por lo tanto -1 es pto. de máximo local, pese a que -1 no es pto. crítico (0.5 pts).

Max y min globales: veremos más adelante que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ por lo cual no hay máximos ni mínimos globales.

(b) Concavidad: si $x \neq 0$ y $x \neq -1$ entonces

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3}[\frac{3x+1}{x^{2/3}(x+1)^{1/3}}]' \\ &= \frac{1}{3}\frac{3x^{2/3}(x+1)^{1/3} - (3x+1)(2/3x^{-1/3}(x+1)^{1/3} + 1/3x^{2/3}(x+1)^{-2/3})}{x^{4/3}(x+1)^{2/3}}. \quad (0.5 \text{ pts}) \end{aligned}$$

Luego, $f''(x) > 0$ ssi el numerador > 0, es decir, ssi

$$3x^{2/3}(x+1)^{1/3} > (3x+1)[2/3x^{-1/3}(x+1)^{1/3} + 1/3x^{2/3}(x+1)^{-2/3}]$$

Notemos que

$$\begin{aligned} x < 0 &\Rightarrow x^{1/3}(x+1)^{2/3} < 0 \\ x > 0 &\Rightarrow x^{1/3}(x+1)^{2/3} > 0 \end{aligned}$$

De este modo, si $x < 0$, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad anterior por $x^{1/3}(x+1)^{+2/3} < 0$ para obtener

$$\begin{aligned} 3x(x+1) &< (3x+1)(2/3(x+1) + 1/3x) \\ 3x(x+1) &< (3x+1)(x+2/3) \\ 3x^2+3x &< 3x^2+2x+x+2/3 \\ 0 &< 2/3 \end{aligned}$$

En consecuencia, en cada uno de los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]-1,0[$ la función f es convexa. Análogamente, si $x > 0$ se deduce que $f''(x) < 0$ y por lo tanto f es cóncava (hasta aquí 0.5 pts).

Como en $x = 0$ hay un cambio en la concavidad, tenemos que $x = 0$ es un punto de inflexión (0.25 pts).

Asíntotas horizontales y verticales: no hay pues

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+2x^2+x} = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3+2x^2+x} = -\infty$$

(0.5 pts. por decir que no hay y la justificación).

Asíntotas oblicuas: primero vemos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}-x\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x(\sqrt[3]{1+2/x+1/x^2}-1)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{1+2/x+1/x^2}-1}{1/x}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/3(1+2/x+1/x^2)^{-2/3}(-2/x^2-2/x^3)}{-1/x^2} \quad \text{(L'Hôpital)}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} +2/3\frac{1+1/x}{(1+2/x+1/x^2)^{2/3}} = +2/3
\end{aligned}$$

Luego, se tiene la asíntota oblicua de ecuación $y = x + 2/3$ (0.5 pts).

Recorrido: de lo anterior se deduce que el recorrido es todo $\mathbb{R}$ (0.25 pts)

Gráfico: (0.5 pts.), observando que en los puntos especiales se tiene

$$f(-\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt[3]{-4}}{3} < 0,\ f(-1) = 0,\ f(0) = 0.$$

Problema 2.

(a) (2.0 pts.) A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x+a)^n$, con $n \geq 1$ un entero, demuestre la fórmula del binomio $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}x^k$.

(b) (2.0 pts.) Sea $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,+\infty)$ y derivable en $(0,+\infty)$ tal que $f(0) = 0$ y f' es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$. Pruebe que $\forall x > 0$, $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ y que $\frac{f(x)}{x}$ es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$.

(c) (2.0 pts.) Dados $a > 0$ y $b > 0$, estudie el crecimiento de la función $f(x) = (a^x + b^x)^{1/x}$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

Sol.:

(a) Sea $f(x) = (x+a)^n$. Tenemos que $f(0) = a^n$. Como $f'(x) = n(x+a)^{n-1}$, entonces $f'(0) = na^{n-1}$ (0.3 pts.). Similarmente, si $n \geq 2$ entonces $f''(x) = n(n-1)(x+a)^{n-2}$, de modo que $f''(0) = n(n-1)a^{n-2}$ (0.3 pts.). Inductivamente se obtiene para $0 \leq k \leq n$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+a)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}(x+a)^{n-k}, \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

y en consecuencia

$$f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Como $f^{(n)}(x) = n!$, se deduce que $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ (0.3 pts.). Por definición del desarrollo de Taylor

$$(x+a)^n = f(x) \overset{\text{(0.5 pts.)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}x^k.$$

(b) Sea $x > 0$. Como f es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$ (0.4 pts. por verificar hipótesis), podemos aplicar el Teorema del Valor Medio para concluir que $\exists \xi \in (0, x)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}. \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

Como f' es estrictamente creciente y $0 < \xi < x$, se deduce que $f'(\xi) < f'(x)$ y por lo tanto $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ (0.4 pts.). Por otra parte, para $x > 0$,

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right) > 0, \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

pues $x > 0$ y $f'(x) - \frac{f(x)}{x} > 0$. Concluimos que $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' > 0$ y por lo tanto $\frac{f(x)}{x}$ es estrictamente creciente (0.4 pts.).

(c) Tenemos por definición

$$f(x) = (a^x + b^x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln g(x)},$$

donde $g(x) = a^x + b^x = e^{x\ln a} + e^{x \ln b}$ (0.2 pts.). Para estudiar el crecimiento de f calculamos su derivada (0.2 pts.):

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x}\ln g(x)}[-\frac{1}{x^2}\ln g(x) + \frac{1}{xg(x)}g'(x)] \\ &= \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln g(x)}[xg'(x) - g(x)\ln g(x)] \qquad \text{(0.4 pts.)} \end{aligned}$$

donde

$$g'(x) = e^{x \ln a}\ln a + e^{x\ln b}\ln b = a^x \ln a + b^x \ln b. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

de modo que

$$\begin{aligned} xg'(x) - g(x)\ln g(x) &= a^x \ln a^x + b^x \ln b^x - (a^x + b^x)\ln(a^x + b^x) \\ &= a^x \ln\left(\frac{a^x}{a^x + b^x}\right) + b^x \ln\left(\frac{b^x}{a^x + b^x}\right) \qquad \text{(0.3 pts.)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

pues $\frac{a^x}{a^x+b^x} < 1$, $\frac{b^x}{a^x+b^x} < 1$, y el logaritmo natural de un real positivo estrictamente inferior a 1 es estrictamente negativo (0.3 pts.). En conclusión, $f'(x) < 0$ (0.2 pts.) y por lo tanto f es decreciente en $(0, +\infty)$ (0.2 pts.).

Problema 3.

Se quiere calcular el costo mínimo de un estanque para agua potable de $45\pi\ m^3$ de capacidad que se construirá en forma de un cilindro circular (de base plana) coronado por una semiesfera, sabiendo que los costos unitarios de obra construida son: base p $\$/m^2$, manto $3p$ $\$/m^2$, cúpula $4p$ $\$/m^2$ $(p > 0)$. Siga las siguientes indicaciones:

(a) (2.0 pts.) Si h es la altura del cilindro y r su radio, deduzca que

$$h(r) = \frac{45}{r^2} - \frac{2}{3}r,$$

y muestre que el costo del estanque en función de r está dado por

$$c(r) = \pi p[9r^2 + 6rh(r)].$$

(b) (4.0 pts.) Bosqueje la función de costo $c(r)$ en su dominio. Determine las dimensiones del cilindro (radio y altura) de manera que el costo del estanque sea mínimo y explicite el valor del costo mínimo. Justifique su respuesta.

Indicación: Volumen esfera de radio r: $V = 4/3\pi r^3$. Area esfera: $A = 4\pi r^2$. Volumen cilindro circular de altura h y base de radio r: $V = \pi r^2 h$. Area lateral cilindro: $A = 2\pi rh$.
Sol.:

(a) Tenemos que

$$V_{estanque} = V_{cilindro} + V_{semiesfera} = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Del enunciado, $V_{estanque} = 45\pi$, de modo que $45\pi = \pi(r^2 h + \frac{2}{3}r^3)$, o equivalentemente para $r > 0$, $h = \frac{45}{r^2} - \frac{2}{3}r$ (0.5 pts.).

Por otra parte, para los costos se tiene que

$$\begin{aligned} c_{total} &= c_{base} + c_{manto} + c_{cúpula}, \\ &= p\pi r^2 + 3p2\pi rh + 4p2\pi r^2. \qquad \text{(0.5 pts.)} \end{aligned}$$

Luego $c(r) = p\pi[r^2 + 6rh(r) + 8r^2] = p\pi[9r^2 + 6rh(r)]$ (0.5 pts.).

(b) Explícitamente se tiene que

$$c(r) = p\pi\left[9r^2 + 6r\{\frac{45}{r^2} - \frac{2}{3}r\}\right] = p\pi\left[9r^2 + \frac{270}{r} - \frac{12}{3}r^2\right] = p\pi\left[5r^2 + \frac{270}{r}\right], \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

siempre que $r > 0$ y $h(r) \geq 0$, es decir $0 < r \leq (\frac{135}{2})^{1/3}$ (0.3 pts.). Además

$$\frac{dc}{dr} = p\pi\left[10r - \frac{270}{r^2}\right] \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

y

$$\frac{d^2c}{dr^2} = p\pi\left[10 + \frac{540}{r^3}\right] > 0 \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

de modo que $c(r)$ es estrictamente convexa (0.3 pts.). Para minimizar $c(r)$ determinamos sus puntos críticos resolviendo la ecuación $\frac{dc}{dr} = 0$ (0.5 pts.), es decir

$$10r - \frac{270}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3 \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

Como la altura correspondiente es $h(3) = \frac{45}{9} - \frac{2}{3}3 = 5 - 2 = 3 > 0$ (0.3 pts.), entonces $r = 3$ está en el dominio y se tiene que es un mínimimo por la convexidad estricta de $c(r)$ (nota: basta decir que $\frac{d^2c}{dr^2} > 0$ en $r = 3$) (0.5 pts.). Además $c(r) \to +\infty$ cuando $r \to 0$, y en consecuencia se tiene el bosquejo (0.5 pts.). Finalmente, el costo mínimo es $c(3) = 135p\pi$ (0.2 pts.).