Pauta Control #4 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función dos veces derivable con f'' continua y $f(0) = 0$. Se define la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ f'(0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) (2 ptos.) Demuestre que g es continua y derivable en $I\!R$.

(b) (2 ptos.) Demuestre que g' es continua en $I\!R$.

(ii) (2 ptos.) Considere la función $g : I\!R \to I\!R$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Use **(i)** para demostrar que g tiene derivada continua en $I\!R$.

Pauta.- **(a)** (2 ptos.) Veamos primero que g es continua y derivable para $x \neq 0$. En efecto

- Si $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ es continua pues f es continua para $x \neq 0$. [**0.25pto**]
- Si $x \neq 0$, $g'(x) = \dfrac{xf' - f}{x^2}$ por álgebra ya que f' existe, luego g es derivable fuera del origen. [**0.25pto**]

Veamos ahora que g es continua y derivable para $x = 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = g(0)$, donde se usó que $f(0) = 0$. Luego g es continua en $x = 0$. [**0.5pto**]
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)/x - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = L_1$. En este punto y para analizar este límite L_1 hay por lo menos tres caminos posibles. Uno es utilizar la regla de l'Hôpital. Otro es utizar un desarrollo de Taylor de f. Otro es intentar directamente con el TVM. Veámoslos uno por uno:

Opción 1 Utilizando la regla de l'Hôpital en L_1 ya que numerador y denominador tienden a cero (recordar $f(0) = 0$):

$$L_1 = \lim_{x\to} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{f''(0)}{2}.$$

Opción 2 Haciendo un desarrollo de Taylor de f de orden 2 en torno a $x = 0$ (usamos que $f(0) = 0$)

$$f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\xi_x), \quad \xi_x \text{ entre } 0 \text{ y } x.$$

Reemplazando en L_1 tenemos

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} f''(\xi_x)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} f''(\xi_x)$$

pero $0 < |\xi_x| < x$, luego $\xi_x \to 0$ si $x \to 0$ y como f'' es continua $f''(\xi_x) \to f''(0)$ si $x \to 0$. De donde se obtiene $L_1 = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Opción 3 Usando el TVM y el hecho que $f(0) = 0$, sabemos que existe ξ_x entre 0 y x tal que $f(x)/x = f'(\xi_x)$. Reemplazando en L_1, tenemos

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{f'(\xi_x) - f'(0)}{x}$$

a su vez, de nuevo por el TVM, existe un η_x entre 0 y ξ_x tal que $\frac{f'(\xi_x) - f'(0)}{\xi_x} = f''(\eta_x)$, de donde

$$L_1 = \lim_{x \to 0} f''(\eta_x) \frac{\xi_x}{x}.$$

Pero en general no es posible concluir que $\frac{\xi_x}{x} \to \frac{1}{2}$.

Con la tercera opción no se puede concluir, pero tiene un cierto puntaje [**hasta 0.75pto**]. Las otras dos opciones de análisis [**1pto**] permiten concluir que g es derivable en $x = 0$ y su derivada vale

$$g'(0) = \frac{f''(0)}{2}.$$

(b) (2 ptos.) Veamos que la derivada de g

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{xf' - f}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{f''(0)}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$. [**0.25pto**] por considerar g' a partir del análisis de la parte anterior (aunque esté incorrectamente calculada).

Claramente lo es para $x \neq 0$ ya que es el cuociente de dos funciones continuas y la del denominador no se anula. [**0.25pto**].

Por otro lado, para $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = L_2.$$

De nuevo, para analizar este límite L_2 presentamos varias opciones:

Opción 1 Utilizando la regla de l'Hôpital en L_2 ya que numerador y denominador tienden a cero (recordar $f(0)=0$):

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2},$$

pues f'' es continua.

Opción 2 Usando el mismo desarrollo de Taylor para f de la parte **(a)** (a este desarrollo se le asigna puntaje solamente en una de ambas partes) se obtiene reemplazando en L_2

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)-xf'(0)-x^2/2f''(\xi_x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{f''(\xi_x)}{2} \\ &= f''(0) - \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2}. \end{aligned}$$

Opción 3 Usando el TVM se encuentran dificultades similares a las ya vistas en la parte **(a)**. En caso de un buen análisis, se le asigna puntaje como en esa parte.

Las dos primeras opciones de análisis permiten concluir que g' es continua en $x=0$ [**1.5pto**]. El alumno podría haber calculado erróneamente el valor de $g'(0)$ de la parte **(a)**. En consecuencia, el análisis anterior, en caso de estar correcto, lo habría llevado a concluir que g' no es continua en 0. Esto debe considerarse correcto. Si por el contrario, el alumno vuelve a cometer errores para forzar la continuidad de g, debe considerarse incorrecto.

(ii) (2 ptos.) Basta verificar las hipótesis de la parte **(i)** para $f(x)=\operatorname{arctg}(x)$ ([**0.2pto**] por identificar f) :

- $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o bien $f:\mathbb{R}\to(-\pi/2,\pi/2)$ [**0.2pto**]
- $f(0)=\operatorname{arctag}(0)=0$ [**0.2pto**]
- $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ [**0.5pto**]
- $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, [**0.5pto**] luego f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ con derivada segunda continua en todo $\mathbb{R}$ (notar que $1+x^2\neq 0$). [**0.2pto**]
- $f'(0)=\frac{1}{1+0}=1$ [**0.2pto**]

P2.- Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=-xf(x), \qquad g'(x)=xg(x), \qquad f(0)=g(0)=1.$$

(i) (1 pto.) Pruebe que $f\cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x)>0$, $g(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Ind: puede utilizar resultados vistos en clases, enunciando claramente las hipótesis. Para la deducción del signo de f y g puede usar el TVI junto a una contradicción.

(ii) (1 pto.) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f.

(iii) (1 pto.) Calcule f'' en función de f (y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.

(iv) (1 pto.) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un ξ entre 0 y x tal que $f(x) = -f''(\xi)$.

(v) (1 pto.) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.

(vi) (1 pto.) Deduzca que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Bosqueje un gráfico de f a partir del estudio anterior.

Pauta.- **(i)** Las funciones f y g son derivables (y por ende continuas) en todo $\mathbb{R}$. Lo mismo para el producto fg. [**0.1pto**]

Para probar que el producto es constante hay dos opciones al menos [**0.4pto**]

Opción 1 Tenemos

$$(fg)' = fg' + f'g = xfg - xfg = 0$$

en todo $\mathbb{R}$. Como la derivada del producto se anula sobre todo $\mathbb{R}$ (un intervalo) entonces (por un resultado visto en clases consecuencia del TVM) se tiene que

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x)g(x) = c.$$

Opción 2 También se puede hacer usando el TVM directamente, en efecto, sea $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado, entonces, aplicando el TVM a fg (que es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2)) se obtiene que existe un ξ entre x_1 y x_2 tal que

$$\frac{f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1)}{x_2 - x_1} = (fg)'(\xi) = 0,$$

de donde $f(x_1)g(x_1) = f(x_2)g(x_2)$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cualesquiera, lo que significa que el producto es constante.

Ahora $f(0)g(0) = 1$ luego $fg = \mathit{constante} = 1$. [**0.1pto**]

Veamos ahora el signo de f y de g. Es claro que si f es positiva también lo es g y viceversa, pues el producto de ambas funciones vale 1. Claramente $f \neq 0$ pues el producto $fg = 1$. Supongamos entonces que $f(x_0) < 0$ para algún $x_0 \neq 0$. Como $f(0) = 1 > 0$ por el TVI existe x_1 con $f(x_1) = 0$ (f continua) lo que no puede ser. [**0.4pto**]

(ii)
- Crecimiento de f. $f'(x) = -xf(x)$. Como $f > 0$ entonces $f' > 0$ para $x < 0$ y $f' < 0$ para $x > 0$. Luego f es (est.) creciente para $x < 0$ y f es (est.) decreciente para $x < 0$. [**0.5pto**]
- Máximos y mínimos de f. Del crecimiento anterior, f tiene una máximo global en $x = 0$ ($f(0) = 1$). [**0.5pto**]

(iii)
- $f'' = (f')' = -xf' - f = (x^2 - 1)f$. [**0.2pto**]
- Concavidad y convexidad de f. De la expresión para f'' y como $f > 0$ vemos que $f'' > 0$ si $|x| > 1$ y $f'' < 0$ si $|x| < 1$. [**0.3pto**] Luego f es convexa en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y cóncava en el intervalo $(-1, 1)$. [**0.4pto**]. Puntos de inflexión: -1 y 1 [**0.1pto**]

(iv) Aplicando el TVM a f' entre 0 y x se obtiene que existe un ξ entre 0 y x tal que

$$f''(\xi) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = \frac{-xf(x)}{x} = -f(x).$$

[**1pto**]

(v) ∘ Crecimiento de f'. Como $(f')' = f''$ el crecimiento de f' viene del análisis del signo de la segunda derivada, que ya se hizo en **(iii)**. Se concluye que f' es (est.) creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y (est.) decreciente en $(-1,1)$. [**0.3pto**]

∘ Acotamiento de f'. Como f' es continua, es acotada en todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ [**0.2pto**]. Podría ser no acotada si $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$, sin embargo, como ya lo vimos en **(ii)**, $f'<0$ cuando $x\to+\infty$ (creciente y acotada superiormente) y $f'>0$ cuando $x\to-\infty$ (decreciente y acotada inferiormente). Luego f' es acotada en todo $\mathbb{R}$. [**0.5pto**]

(vi) ∘ Límites.

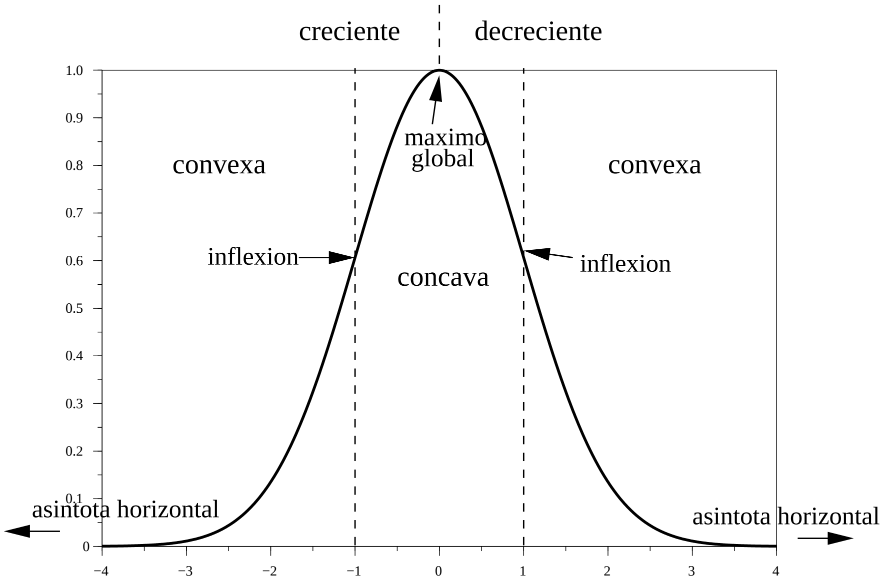
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{f'(x)}{x} = 0$$

por comparación ya que $f'(x)$ es acotada si $x\to+\infty$. [**0.25pto**]
Del mismo modo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{f'(x)}{x} = 0$$

por comparación ya que $f'(x)$ es acotada si $x\to-\infty$. [**0.25pto**]

∘ Gráfico de f. [**0.5pto**]



Pauta.-

P3.- **(i)** (3 ptos.) Encuentre el desarrollo de Taylor de $f(x)=\ln(\cos(x))$ hasta el orden 3, en torno a $x=0$, y demuestre que el resto está acotado por $\frac{2}{3}|x|^4$, para $x\in[-\pi/4,\pi/4]$.

(ii) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x=1. \end{cases}$$

(a) (2 ptos.) Considerando particiones uniformes (o equiespaceadas) del intervalo $[0,1]$, calcule las sumas superiores e inferiores de f.

(b) (1 pto.) Enuncie la condición de Riemann y utilícela para probar que f es integrable en $[0,1]$.

Pauta.- **(i)** (3 ptos.) Primero notar que $f(x)=\ln(\cos(x))$ está bien definida en $(-\pi/2,\pi/2)$. Además f es infinitamente derivable en ese intervalo.

Recordar que el polinomio de Taylor de orden 3 de f en torno a $x=0$ es

$$P_3(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3.$$

[**0.4pto**]

Calculemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x))=-\tan(x) \\ f''(x) &= -\sec^2(x) \\ f'''(x) &= -2\sec(x)(\sec(x)\tan(x))=-2\sec^2(x)\tan(x) \end{aligned}$$

([**0.4pto**] cada derivada).

De lo anterior: $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f'''(0)=0$ y entonces

$$P_3(x)=-\frac{1}{2}x^2.$$

[**0.2pto**].

Del Teorema de Taylor:

$$f(x)=P_3(x)+\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)x^4$$

donde ξ está entre 0 y x. [**0.4pto**]

Calculemos

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= (-2\sec^2(x)\tan(x))' \\ &= -4\sec(x)\tan(x)(\sec(x)\tan(x))-2\sec^2(x)\sec^2(x) \\ &= -4\sec^2(x)\tan^2(x)-2\sec^4(x) \\ &= -2\sec^2(x)(2\tan^2(x)+\sec^2(x)). \end{aligned}$$

[**0.4pto**]

Si $x\in[-\pi/4,\pi/4]$, $\xi\in(-\pi/4,\pi/4)$ y luego

$$|f^{(4)}(\xi)|\le 2\cdot 2\,(2+2)=16$$

ya que

$$\begin{aligned} \sup_{\xi\in(-\pi/4,\pi/4)}|\sec(\xi)| &= \sqrt{2} \\ \sup_{\xi\in(-\pi/4,\pi/4)}|\tan(\xi)| &= 1. \end{aligned}$$

Así, el resto se puede acotar por

$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4!}|f^{(4)}(\xi)|x^4 \leq \frac{16}{24}|x|^4 = \frac{2}{3}|x^4|.$$

[0.4pto]

(a) (2 ptos.) Denotemos por P_n la partición uniforme de $[0,1]$ con n intervalos, o sea

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} \mid i \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\}.$$

- Cálculo de $s(f, P_n)$ (suma inferior). En los intervalos $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ con $1 \leq i \leq n-1$ se tiene que $f(x) = x$ y luego **[0.3pto]**

$$\inf_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} f = \frac{i-1}{n} \quad , \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

  Por otro lado, si $n \geq 2$,

$$\inf_{[\frac{n-1}{n}, 1]} f = 0$$

  ya que $f(x) \geq 0$ para $x \in [\frac{n-1}{n}, 1]$ y $f(1) = 0$. **[0.4pto]**
  Entonces (notar que la primera suma tiene índice superior $n-1$)

$$\begin{aligned} s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-2} i \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2n} + \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

  [0.3pto]

- Cálculo de $S(f, P_n)$ (suma superior). En los intervalos $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ con $1 \leq i \leq n-1$ se tiene que $f(x) = x$ y luego **[0.3pto]**

$$\sup_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} f = \frac{i}{n} \quad , \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

  Por otro lado, si $n \geq 2$,

$$\sup_{[\frac{n-1}{n}, 1]} f = 1$$

  ya que $f(x) \leq 1$ para $x \in [\frac{n-1}{n}, 1]$ y $f(x) \to 1$ si $x \to 1$. **[0.4pto]**
  Entonces (notar que la primera suma tiene índice superior $n-1$)

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i \;+\; \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}
\end{aligned}
$$

[**0.3pto**]

(b) (1 pto.) La condición de Riemann expresa que una función (acotada) f es integrable en el sentido de Riemann ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists P \in \mathcal{P}_{[0,1]} \text{ tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon,$$

donde $\mathcal{P}_{[0,1]}$ es el conjunto de todas las particiones de $[0,1]$ (todas, las uniformes y las no uniformes). [**0.4pto**]

Calculemos

$$
\begin{aligned}
S(f,P_n) - s(f,P_n) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2n} + \frac{2}{n^2}\right) \\
&= \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Esta última expresión tiende a cero si $n \to \infty$, por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe $n \geq 2$ tal que $S(f,P_n) - s(f,P_n) < \varepsilon$ (basta tomar algún n suficientemente grande de modo que $\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} < \varepsilon$). [**0.6pto**]