**Pauta Control 4 MA12A, Primavera 1996**

**Problema 1.**

(a) Si $|x| < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$. Por álgebra de límites se concluye que $f(x) = -1$ (**0.5 pts.**).
Si $|x| > 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$. Dividiendo numerador y denominador por $x^{2n}$ y aplicando álgebra de límites, concluimos que, para $|x| > 1$, $f(x) = 1$ (**1.0 pto.**).
Finalmente, para $x = 1$ y $x = -1$, la sucesión que define a $f$ es constante e igual a cero. Por lo tanto, $f(1) = f(-1) = 0$ (**0.5 pts.**).

(b) Como la función $f$ es constante en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ésta es derivable con derivada nula (**0.5 pts.**). Además, sabemos que si $f$ es derivable en un punto entonces es continua en ese punto, lo que implica que $f$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (**0.5 pts.**).
Veamos que $f$ no es continua en los puntos $\{-1, 1\}$. Para ello notamos que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$ y que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$ (**0.5 pts.**). Como $f$ no es continua en $\{-1, 1\}$ tampoco es derivable (**0.5 pts.**).

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-x^2}\frac{arctg(x)}{x}$. Como $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctg(x)}{x} = 1$ el valor del límite es 1 (**0.5 pts.**). Por lo tanto, basta con definir $f(0) = 1$ para que $f$ sea continua en 0 (**0.5 pts.**).

   (b) El intervalo $[-1, 1]$ es cerrado y acotado por lo que la función $f$ es uniformemente continua (**1.0**).

**Problema 2**

1. La curva intersecta al eje de las abscisas con $y = 0$. Evaluando en la ecuación obtenemos que $\ln(1 + x^2) = 1$ y por lo tanto la solución positiva es $x = \sqrt{e-1}$ **(0.5 pts.)**.

   Para calcular la tangente a la curva derivamos cada lado de la ecuación

   $$(e^{2arcsen(y\cdot x)})' = e^{2arcsen(y\cdot x)} 2 \frac{y'x + y}{\sqrt{1-(y\cdot x)^2}}$$

   y

   $$(\ln(1 + x^2 + y^2))' = \frac{2x + 2yy'}{1 + x^2 + y^2}$$

   **(0.5 pts.)** evaluando en $y = 0$ y $x = \sqrt{e-1}$ se tiene que

   $$2y'\sqrt{e-1} = \frac{2}{e}\sqrt{e-1}$$

   Luego la tangente tiene ecuación $y = \frac{1}{e}(x - \sqrt{e-1})$ **(0.5 pts.)**.

2. (a) $f$, $f'$ y $f''$ están dadas por

   $$\begin{aligned} f(x) &= cos(kg(x)) \\ f'(x) &= -sen(kg(x))kg'(x) \quad \textbf{(0.5 pts.)}. \\ f''(x) &= -cos(kg(x))(kg'(x))^2 - sen(kg(x))kg''(x) \quad \textbf{(0.5 pts.)}. \end{aligned}$$

   Expresando $f''$ en términos de $f, f', g, g', g''$ se obtiene:

   $$f'' = -f(kg')^2 + f'\frac{g''}{g'} \quad \Leftrightarrow \quad f'' + f(kg')^2 - f'\frac{g''}{g'} = 0$$

   **(1.0 pto.)**

   (b) Para $g(x) = x$ se tiene que $f(x) = cos(kx)$. Conociendo que $cos^{(n)}(x) = cos(x + \frac{n\pi}{2})$ el valor de la derivada $n$ de $f$ en cero es $cos(\frac{n\pi}{2})k^n$ **(2.0 pts.)**.

   Observacion. Otra forma de resolver (b) es utilizar la ecuación de la parte (a) y establecer una recurrencia para $f^{(n)}(0)$.

**Problema 3**

1. La función $f$ se escribe $f(x) = b^2a - x^2a - b^2x + x^3$ por lo tanto

$$f(x) - f(y) = (x-y)(x^2 + xy + y^2 - a(x+y) - b^2)$$

Tomando $y = x + h$ obtenemos

$$f(x) - f(x+h) = (x-y)(x^2 + x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2 - a(x+x+h) - b^2)$$

$$= -h(3x^2 - 2ax - b^2 + 3xh + h^2 - ah)(\mathbf{1.0\ pto.}). \tag{1}$$

2. Los candidatos a extremos son los puntos donde la derivada de $f$ se anula, más los extremos del intervalo. Derivando $f$ obtenemos $3x^2 - 2ax - b^2 = 0$, ecuación de grado dos que tiene como raices a $u = \frac{a+\Delta}{3}$ y a $v = \frac{a-\Delta}{3}$, con $\Delta = \sqrt{a^2 + 3b^2}$ (**1.0 pts.**).

   Para verificar que hay sólo un mínimo (resp. máximo) global debemos probar que entre los puntos $-b, v, u, b$, hay uno donde la función $f$ es estrictamente inferior (resp. superior) a los demás.

   Veamos que $v$ es el máximo global y que $u$ es el mínimo global. Para ello utilizamos la ecuación 1 para acotar la diferencia entre $f(v)$ y $f(v+h)$. Como $f'(v) = 0$ el primer término dentro del paréntesis se anula y entonces nos queda que.

$$f(v) - f(v+h) = -h^2(h + 3v - a) = -h^2(h - \Delta).$$

   Como $-b \leq v + h \leq b$ podemos acotar $(h - \Delta)$ por $b - v - \Delta = \frac{3b-a-2\Delta}{3}$. Para ver que esta cantidad es estrictamente negativa debemos verificar que $2\Delta > 3b - a$. Pero esta desigualdad es equivalente a $3(a^2 + 2ab + b^2) > 0$ que siempre es verdadera, para $b > 0$. Por lo tanto $f(v)$ es estrictamente mayor que $f(y)$ para cualquier $y \in [-b, b]$ (**1.0 pts.**). Para verificar que $u$ es mínimo global usamos la ecuación 1 y obtenemos

$$f(u) - f(u+h) = -h^2(h + 3u - a) = -h^2(h + \Delta)$$

   Acotando el término $(h + \Delta)$ por $-b - u + \Delta = \frac{-3b-a+2\Delta}{3}$ reducimos el problema a probar que $2\Delta > 3b + a$. Esta desigualdad es equivalente a $3(a^2 - 2ab + b^2) > 0$ que es cierta para $a \neq b$ (**1.0 pts.**).

   <u>Observacion</u> También es posible evaluar la función en los cuatro puntos $-b, v, u, b$ y obtener que $f(-b) = f(b) = 0$, que $f(v) > 0$ y que $f(u) < 0$.

3. Utilizamos otra vez la ecuación 1 para calcular $f(v) - f(u)$, tomando $h = u - v$. Así, obtenemos que la diferencia en términos de $a$ es $d(a)$ dado por

$$d(a) = |f(v) - f(u)| = (u-v)^2|(u - v - 3u + a)| = \frac{4}{27}\Delta^3 = \frac{4}{27}\sqrt{a^2 + 3b^2}^3$$

   (**1.0 pto.**).

4. Claramente $a = 0$ es el valor de $a$ que hace mínima la diferencia. En efecto $d(0) = \frac{4}{27}(\sqrt{3})^3 b < d(a) \ \ \forall a \neq 0$ (**1.0 pto.**).