PAUTA N^o 4 - MA 12A CALCULO

Problema 1.-

1.- Calculemos $l = \lim_{x\to 1} \frac{x\ell nx}{x-1}$

$\lim_{x\to 1} x\ell nx = 0$ y $\lim_{x\to 1} x-1 = 0$ de modo que se puede aplicar l'Hôpital y obtenemos

$$(x\ell nx)' = \ell nx + 1 \qquad (x-1)' = 1$$

y entonces

$$\ell = \lim_{x\to 1} \frac{\ell nx + 1}{1} = 1$$

por lo tanto $\alpha = 1$

como en $x \neq 1$ la función es el cuociente y producto de funciones continuas. La función misma es continua.

2.- Para $x \neq 1$ y $x > 0$ sabemos que la derivada existe pues es el cuociente y producto de funciones derivables. En este caso $f'(x) = \frac{(1+\ell nx)(x-1)-x\ell nx}{(x-1)^2}$

Para $x = 1$ debemos calcular f' por definición.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x\ell nx}{(x-1)} - 1}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ell nx - (x-1)}{(x-1)^2}$$

como $\lim_{x\to 1} x\ell nx - (x-1) = 0$ y $\lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ podemos aplicar l'Hôpital y obtenemos.

$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{1+\ell nx-1}{2(x-1)}$: otra vez $\ell nx \to 0$ y $(x-1) \to 0$ cuando $x \to 1$ por lo tanto aplicamos l'Hôpital

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2(1)} = 1/2$$

3.- Veamos cuanto vale $\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)-\ell nx}{(x-1)^2}$

l'Hôpital $= \lim_{x\to 1} \frac{1-1/x}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2x(x-1)} = 1/2$

luego f' es continua en 1. Además para $x \neq 1 f'(x) = \frac{(x-1)-\ell n x}{(x-1)^2}$ que es continua por ser producto, resta y cuociente de funciones continuas.

4.- $(x-1)f(x) = x\ell n x \setminus (\ )^{(n)}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^{(k)} f^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} \ \ell n^{(n-k)} x$$

$$(x-1)f^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) = x\ell n^{(n)} x + n\ell n^{(n-k)}(x) \quad x \to 1$$

$$nf^{(n-1)} nf^{(n-1)}(1) = \ell n^{(n)}(1) + n\ell n^{(n-1)}(1)$$

$$\ell n^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$$

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(1) &= \frac{1}{n}\left((-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{} + n(-1)^{1-2} \ \frac{(n-2)!}{}\right) \\ &= \frac{(-1)^{1-2}(n-2)!}{n} \ [-(n-1)+n] \\ &= \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{n} \end{aligned}$$

5.- $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1) \ \frac{(x-1)^2}{2} + f'''(1) \ \frac{(x-1)^3}{3!}$

$$= 1 + \ 1/2(x-1) - \ \frac{(x-1)^2}{3!} + \ \frac{2(x-1)^3}{4!}.$$

Problema 2.- $f(x) = e^{1/\ell n x}$.

1.- Como $\ell n x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y está definida para $x > 0$, el dominio de f es $I\!R^*_+ \setminus \{1\}$. Por lo mismo f no es par ni impar.

Si $x \to +\infty, \ell n(x) \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\ell n x} \to 0 \Rightarrow f(x) \to 1$. Por lo que hay una asíntota horizontal $y = 1$ para $x \to +\infty$. Entonces no existe asíntotas oblicuas propias $(m \neq 0)$.

Si $x \to 0^+, \ell n(x) \to -\infty \ \frac{1}{\ell n x} \to 0 \Rightarrow \ f(x) \to 1$. Así, no hay asíntotas verticales en $x = 0$.

Si x $\to 1^-, \ell n(x) \to 0^-, \frac{1}{\ell nx} \nearrow -\infty \to f(x) \to 0$. Además, si $x \to 1^+, \ell nx \to 0^+$

$\frac{1}{\ell nx} \nearrow +\infty \Rightarrow f(x) \nearrow +\infty$ con lo cual existe una asíntota vertical en $x = 1$.

$f'(x) = e^{1/\ell nx} \cdot \frac{-1}{\ell n^2 x} \cdot \frac{1}{x}$. Como $x > 0$ $f'(x) < 0$. Por lo tanto f decrece en los intervalos $]0,1[$ y $]1,+\infty[$. Como no está definida en cero no posee máximo local. Además como es decreciente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ y en 1 no está definida, no posee máximo local.

$f'(x) = e^{1/\ell nx} \left[\frac{1}{x^2 \ell n^4 x} + \frac{\ell n^2 x + 2(\ell nx)x/x}{x^2 \ell n^4 x}\right] = \frac{e^{1/\ell nx}}{x^2 \ell n^4 x}(1 + \ell nx)^2 \geq 0.$

f es convexa en $]0,1[$ y $]1,+\infty[$ y no posee punto de inflexión. Además no posee ceros y es siempre positiva. Debido a su decrecimiento, a que $f(]0,1[\subseteq [0,1]$ y a que $f(]1,+\infty[) \subseteq]1,+\infty[$ no puede ser periódica. Por otra parte recorre $\mathbb{R}^*_+ \setminus \{0,1\}$

Gráfica

2.- $\ell = \lim\limits_{x\to 0} x^{-2} \ell n(\frac{senx}{x})$. Como $\frac{senx}{x} \to 1, \ell n(\frac{senx}{x}) \to 0$ y $x^2 \to 0$ cuando $x \to 0$, podemos aplicar l'Hôpital.

$\ell = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{senx} \cdot (\frac{xcosx - senx}{x^2})}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{xcosx - senx}{2x^2 senx}$. Aplicando esta vez l'Hôpital,

$xcos - senx \to 0$ y $2x^2 senx \to 0$

$\ell = \lim \frac{cosx - xsenx - cosx}{4xsen + 2x^2 cosx}$. Dividiendo por $xsenx$, $\ell = \lim \frac{-1}{4 + \frac{2x}{senx} \cdot cosx} = -\frac{1}{6}$

Problema 3.-

1.- La recta tangente a f en c es $L : y - f(c) = f'(c)(x - c)$. Queremos que L pase por el origen, de un modo que c debe satisfacer, $cf'(c) = f'(c)$.

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, como $a > 0$ sabemos que en $[a,b]$ g es continua y en $]a,b[$ derivable.

Además $g(a) = g(b) = 0$, de modo que existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$ (Teo de Rolle).

Volviendo a f obtenemos que $g'(x)\Big|_c = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}\Big|_c = 0$. Así $cf'(c) = f(c)$.

Si $a = 0$ podemos hacer algo análogo definiendo

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/x & b \geq x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\ell = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ corresponde a $f'(0) = 0$. Luego g es continua en $]0, b[$. Por lo que es posible aplicar el razonamiento anterior.

2.- $L : ay + bx = ab$

$ar + bh = ab$ y $h = \frac{ab - ar}{b} = \frac{a}{b}(b - r)$

El volumen del cilindro es: $V = \pi r^2 h$

que en términos de r se expresa como $V = \frac{\pi a}{b}(b - r)_{r^2}$

llamemos $c = \frac{\pi a}{b}$ $V = c(b - r)r^2$. Los candidatos a máximo son:

$V'(r) = 0$ o $r = a, r = 0$, es decir, $V'(r) = c[2(b - c)r - r^2] = cr[2b - 3r]$

luego $\{\frac{2}{3}b, a, 0\}$ como $V(a) = V(0) = 0$ y $V(\frac{2}{3}b) = c\frac{b}{3}\ \frac{4b^2}{9} = \frac{4}{27}cb^3$

el volumen máximo es $\frac{4}{27}\pi\ ab^2$

ahora $a + b = 1$ luego el volumen máximo es

$V(a) = \frac{4}{27}\ \pi a(1-a)^2$. Así $V'(a) = \frac{4}{27}\pi[(1-a)^2 - ra(1-a)] = \frac{4}{27}\ \pi(1-a)[(1-a)-2a] = \frac{4}{27}\ \pi(1 - a)(1 - 3a) \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ $V(1/3) = \frac{4}{27}\ \pi\frac{1}{3}\ \frac{4}{9} = \frac{\pi 16}{(27)^2}$