PAUTA N^o 4 - MA 12A CALCULO - 1998

Problema 1.-

$$f(x) = e^{1/x}(1 - 1/x + 2/x^2)$$

a.- La función $e^{\frac{1}{x}}$ es positiva $\forall x > 0$. y

$$(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}) = \frac{1}{x^2}(x^2 - x + 2) = \frac{1}{x^2} \quad \underbrace{((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4})}_{> 0}$$

Luego $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

b.-

i.- $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} f(x)$: cuando $x \to \pm\infty$ $\frac{1}{x} \to 0$ y $\frac{1}{x^2} \to 0$, además

$$e^{1/x} \to 1 \text{ y } (1 - 1/x + \frac{2}{x^2}) \to 1, \text{ luego } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

ii.- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$: cuando $x \to 0^+$ $\frac{1}{x} \to +\infty$ y $e^{1/x} \to +\infty$. Además,

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{2 - x}{x^2} \to +\infty. \text{ Luego } \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

iii.- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$: cuando $x \to 0^-$, $\frac{1}{x} \to -\infty$ y $e^{1/x} \to 0$. Al igual que antes

$$(1 - 1/x + \frac{2}{x^2}) \to +\infty. \text{ Luego aplicamos } L'h\hat{o}pital \text{ a: } \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2}(x^2 - x + 2).$$

Como $\lim_{x \to 0^-} (x^2 - x + 2) = 2$

sólo nos preocupamos de $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2}$.

Como $(e^{1/x})' = e^{1/x} \cdot (-1/x^2)$ las potencias de x no desaparecen.

Así es necesario reescribir $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{e^{1/x}}}$

Haciendo el cambio de variables $t = \frac{-1}{x}$ se tiene

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^{+t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t}{+e^{+t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{e^{+t}} = 0.$$

c.-

$$f' : (e^{1/x})'(1 - 1/x + \frac{2}{x^2}) + e^{1/x}(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}) \text{ y como } (e^{1/x})' = e^{1/x} \cdot (-1/x^2)$$

$$f'(x) = e^{1/x} \left[\frac{-1}{x^2}(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}) + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right] = e^{1/x} \left[-\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4} \right] = \frac{\cdot e^1/x}{x^4}(3x+2)$$

$Para\ 3x + 2 > 0$ $f'(x) < 0$ y f es decreciente.
$Para\ 3x + 2 < 0$ $f'(x) > 0$ y f es creciente

$f'(\frac{-2}{3}) = 0$ y
entonces $x_0 = -2/3$
es máximo

$$f(-2/3) = e^{-3/2}(1 + \underbrace{3/2 + 9/4}_{6} 2) = 7e^{-3/2}$$

d.- $f'' : -(e^{1/x})^1 \frac{(3x+2)}{x^4} - e^{1/x}(\frac{-9}{x^4} - \frac{8}{x^5}) = -e^{1/x}(-1/x^2)\frac{(3x+2)}{x^4} + e^{1/x} \ (\frac{9x+8}{x^5})$

$f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^6}[3x + 2 + 9x^2 + 8x] = \frac{e^{1/x}}{x^6}(9x^2 + 11x + 2) = \frac{e^{1/x}}{x^6}(9x+2)(x+1)$

		-1	$-2/9$
f''	$+$	$-$	$+$
f'	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Luego f tiene a -1 y $-2/9$ como puntos de inflexión y f es convexa en $(-\infty, -1), (-2/9, +\infty)$ y cóncava en $(-1, -2/9)$.

e.-

Problema 2.-

a.- Para que $(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h))$ y $(x_0+2h, f(x_0+2h))$ estén en la parábola, deben satisfacer:

$$f(x_0) = c_h + b_h(x_0 - x_0) + a_h(x_0 - x_0)^2 = c_h$$

(1) $f(x_0 + h) = c_h + b_h h + a_h \cdot h^2$

(2) $f(x_0 + 2h) = c_h + 2hb_h + 4h^2 a_h$

(2) -2(1)

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) &= f(x_0) + 2hb_h + 4h^2 a_h - 2f(x_0) - 2b_h \cdot h - 2a_h \cdot h^2 \\ &= +2h^2 a_h - f(x_0) \end{aligned}$$

$$\text{luego } a_h = \frac{f(x_0) + f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h)}{2h^2}$$

(2) -4(1)

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) &= f(x_0) + 2hb_h + 4h^2 ah - 4f(x_0) - 4b_h \cdot h_{-4a_h} \cdot h^2 \\ &= -2hb_h - 3f(x0) \end{aligned}$$

$$\text{luego } b_h = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$$

b.- $a = \lim_{h\to 0} a_h$; como $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} f(x_0) + 2h) = f(x_0)$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0) + f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) = 0 \text{ y } \lim_{h\to 0} 2h^2 = 0.$$

Podemos aplicar $l'h\hat{o}pital$ y $a = \lim_{h\to 0} (\frac{f'(x_0+2h)\cdot 2 - 2f'(x_0+h)}{4h})$

Como f' es continua, $\lim_{h\to 0} f'(x_0 + 2h) = \lim_{h\to 0} f'(x_0 + h) = f'(x_0)$.

Además $\lim_{h\to 0} h = 0$. Aplicamos otra vez $l'h\hat{o}pital$ y obtenemos

$a = \lim\limits_{h\to 0}(\frac{4f''(x_0+2h)-2f''(x_0+h}{4})$. Como f'' es continua

$\lim\limits_{h\to 0} f''(x_0+2h) = \lim\limits_{h\to 0} f''(x_0+h) = f''(x_0)$ luego $a = \frac{4f''(x_0)-2f''(x_0)}{4}. = \frac{1}{2}f''(x_0)$

$$a = \frac{1}{2}f''(x_0) \qquad \text{y} \qquad c = f(x_0)$$

Utilizando (1) se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} b_h &= \lim_{n\to 0} \frac{(f(x_0+h)-f(x_0))}{h} - a_h\cdot h = f'(x_0) - \lim_{h\to 0} a_h\cdot h \\ &= f'(x_0) - a\cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0). \qquad b = f'(x_0)\end{aligned}$$

(también se puede calcular $\lim\limits_{h\to 0} b_h = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-f'(x_0+2h)\cdot 2+4f'(x_0+h)}{2} = f'(x_0)$)

c.- Sólo hay que calcular $(x^5 ln(1+x^2))|_{x_0=1} = ln2$,

$$(x^5 ln(1+x^2))' = 5x^4 ln(1+x^2) + \frac{x^5}{1+x^2}\cdot 2x\Big|_{x_0=1} = 5ln2 + \frac{2}{2} = 5ln2+1$$

$$\begin{aligned}\text{y } (x^5 ln(1+x^2))'' &= 20x^3 ln(1+x^2) + \frac{5x^4}{1+x^2}\cdot 2x + \frac{(12x^5(1+x^2)-2x(2x^6))}{(1+x^2)^2}\Big|_{x_0=1} \\ &= 20ln2 + \frac{10}{2} + \frac{(12\cdot 2-4)}{(2)^2} = 20ln2+5+5 = 10(2ln2+1)\end{aligned}$$

$$a = ln2 \qquad b = 5ln2+1 \qquad c = 5(2ln2+1)$$

Problema 3.-

a.- $g(x) = ln(f(x))$ está bien definida pues $f(x) > 0\ \forall x \in I\!R$.

Aplicando regla de la cadena obtenemos $g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

derivando otra vez se obtiene $g''(x) = \frac{f''(x)\cdot f(x) - f'(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}$

como $f''(x)\cdot f(x) \geq (f')^2(x) \Rightarrow g''(x) \geq 0$ y luego g es convexa.

b.- $f'(x) = (x^{1/x})' = (e^{\frac{1}{x}lnx})' = e^{1/x\ \ lnx} \cdot (\frac{-1}{x^2}lnx + \frac{1}{x^2}) = \frac{x^{1/x}}{x^2}(1 - lnx)$

luego $f'(x) > 0$ para $1 - lnx > 0 \Leftrightarrow 1 > lnx \Leftrightarrow e > x$

$f'(x) < 0$ para $x > e$

entonces en $x_0 = e,\ f$ tiene un máximo.

Además, f es decreciente para $x > e$ y creciente. para $x < e$; Así, $n^{1/n}$ tiene su valor máximo en $n = 2$ o $n = 3$.

Pero, $2^{1/2} < 3^{1/3}$ pues $8 = 2^3 < 3^2 = 9$. Luego el máximo es $\sqrt{2}$

c.- Vamos a tomar $b = a + h$: $\exists c \in (a, b),\ g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$

luego $g'(c)(b - a) + g(a) = g(b)$

$g(a) = f(a) + f'(a)(a + h - a)$

$g(b) = g(a + h) = f(a + h) + f'(a + h)(a + h - (a + h)). = f(a + h)$

$$\left.\begin{array}{r} f(a+h) = f(a) + f'(a)h + g'(c)\cdot h \\ g'(t) = f'(t) + f''(t)(a+h-t)\cdot + (-f'(t)) \end{array}\right\} f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + hf''(c)(a+h-c)$$

$g'(c) = f''(c)(a + h - c)$