Pauta Control #4 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 05/09 18:00 (M–Z) 19:00 (A–L)). Esta se puede obtener en la página: `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** (2 ptos.) Sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g < 0$ y $h > 0$. Dadas las constantes $a, b, c > 0$, estudie la monotonía de

$$f(x) = g(b - ax^3) \cdot h(\arctan(cx)).$$

Nota: los paréntesis denotan composición.

(ii) **(a)** (2 ptos.) Usando el Teorema del Valor Medio o **TVM**, demuestre que

$$1 + \ln x < (x+1)\ln(x+1) - x\ln x < 1 + \ln(x+1), \quad \forall x > 0.$$

(b) (2 ptos.) Deduzca de **(a)** la desigualdad

$$n \ln n - (n-1) \leq \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < (n+1)\ln(n+1) - n, \quad \forall n \geq 1.$$

Pauta.- **(i)** La función

$$f(x) = g(b - ax^3) \cdot h(\arctan(cx))$$

es derivable por ser producto de composición de funciones derivables en todo $\mathbb{R}$. Utilizando la regla del producto y la regla de la cadena, su derivada vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(b-ax^3)(b-ax^3)' \cdot h(\arctan(cx)) + g(b-ax^3) \cdot h'(\arctan(cx))(\arctan(cx))' \\ &= -3ax^2 \cdot g'(b-ax^3) \cdot h(\arctan(cx)) + \frac{c}{1+(cx)^2} \cdot g(b-ax^3) \cdot h'(\arctan(cx)). \end{aligned}$$

Analicemos el signo de esta derivada. De las hipótesis es claro que:

$$g, h \text{ crecientes y derivables} \quad \Rightarrow \quad g', h' \geq 0.$$

de donde $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \underbrace{-3ax^2}_{\leq 0} \cdot \underbrace{g'(b-ax^3)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{h(\arctan(cx))}_{>0} &\leq 0 \\ \underbrace{\frac{c}{1+(cx)^2}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{g(b-ax^3)}_{<0} \cdot \underbrace{h'(\arctan(cx))}_{\geq 0} &\leq 0. \end{aligned}$$

Por lo que $f' \leq 0$ en todo $\mathbb{R}$, esto es, f es decreciente en todo $\mathbb{R}$. (Ver Notas).

Notas:

1. El signo de b es irrelevante.
2. La aseveración "g creciente implica $g' > 0$" es FALSA, por ejemplo $g(x) = x^3$ es estrictamente creciente y $g'(0) = 0$ este error resta **[0.5pto]**. Recordemos que si I es un intervalo real, no necesariamente acotado, y f es derivable en I:

$$\begin{array}{ccc} f' < 0 \text{ en } I & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & f \text{ (est.) decreciente en } I \\ f' \leq 0 \text{ en } I & \Leftrightarrow & f \text{ decreciente en } I. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f' > 0 \text{ en } I & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & f \text{ (est.) creciente en } I \\ f' \geq 0 \text{ en } I & \Leftrightarrow & f \text{ creciente en } I. \end{array}$$

(ii) (a) Consideremos la función $f(x) = x \ln x$ en el intervalo $[a, a+1]$ con $a > 0$. Esta función es claramente continua en $[a, a+1]$ y derivable en $(a, a+1)$, de hecho

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad \forall x > 0.$$

Aplicando el TVM en $[a, a+1]$, $a > 0$ se obtiene

$$\frac{f(a+1) - f(a)}{a+1-a} = f'(c) \quad \text{para algún } c \in (a, a+1).$$

Esto es

$$(a+1)\ln(a+1) - a \ln a = 1 + \ln c.$$

Ahora como la función logaritmo natural es estrictamente creciente

$$a < c < a+1 \Rightarrow \ln a < \ln c < \ln(a+1)$$

entonces

$$1 + \ln a < (a+1)\ln(a+1) - a\ln a < 1 + \ln(a+1), \quad \forall a > 0.$$

(b) Sumando la desigualdad de la izquierda de la parte **(a)** para $x = k$ natural entre 1 y n se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} (1 + \ln k) < \sum_{k=1}^{n} [(k+1)\ln(k+1) - k \ln k]$$

lo que por propiedad telescópica queda

$$n + \sum_{k=1}^{n} k \ln k < (n+1)\ln(n+1) - 1\ln 1 = (n+1)\ln(n+1)$$

esto es

$$\sum_{k=1}^{n} k \ln k < (n+1)\ln(n+1) - n.$$

Análogamente, sumando ahora la desigualdad de la derecha de la parte **(a)** para $x = k$ natural entre 1 y $n-1$, $n \geq 2$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n-1}[(k+1)\ln(k+1) - k\ln k] < \sum_{k=1}^{n-1}(1+\ln(k+1))$$

lo que por propiedad telescópica queda

$$n\ln n - 1\ln 1 = n\ln n < (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)$$

cambiando índices en la sumatoria

$$n\ln n - (n-1) < \sum_{k=2}^{n}\ln k = \sum_{k=1}^{n}\ln k \quad (\text{pues } \ln 1 = 0).$$

Nota: Si se quiere considerar además el caso $n = 1$ basta cambiar $<$ por $\leq$ en esta desigualdad pues queda $0 = 0$. Este caso no tiene puntaje.

Puntaje:

(i)	**[0.2pto]**	Justificación de derivabilidad
	[1pto]	Derivada f'
	[0.5pto]	Análisis de signo (en particular g, h crecientes$\Rightarrow$ $g', h' \geq 0$) ver Notas
	[0.3pto]	Conclusión (en particular $f' \leq 0 \Rightarrow f$ decreciente)
(iia)	**[0.5pto]**	Elección de $f(x) = x\ln x$ y del intervalo $[a, a+1]$
	[0.2pto]	Derivada f'
	[0.2pto]	Hipótesis del TVM (f continua en el cerrado y derivable en el abierto)
	[0.5pto]	Identidad del TVM
	[0.2pto]	ln es estrictamente creciente
	[0.4pto]	Acotamiento y conclusión
(iib)	**[1pto]**	Primera desigualdad
	[1pto]	Segunda desigualdad (ver Nota)

P2.- Considere la función $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \to I\!\!R$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$.

- **(i)** (1.2 pto.) Calcule $\lim f(x)$ cuando $x \to -1^+$ y $x \to 1^-$.
- **(ii)** (1.2 pto.) Pruebe que el valor $f(0) = -1$ repara la continuidad de f en $x = 0$.
- **(iii)** (1.2 pto.) Calcule f' para $x \neq 0$.
- **(iv)** (1.2 pto.) Calcule por definición $f'(0)$.
- **(v)** (1.2 pto.) Pruebe que f es decreciente. Use que $\ln z \geq 1 - \dfrac{1}{z}$ para $z > 0$.

Pauta.- **(i)**

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} = 0$$

pues el numerador tiende a $\ln 2$ y el denominador tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} = -\infty$$

pues el numerador tiende a $-\infty$ y el denominador tiende a $\ln 2$.

Nota: También se puede deducir un límite del otro notando que

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

(ii) El valor $f(0) = -1$ repara la continuidad de f en $x = 0$. Para ello, hay que verificar que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} = -1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}.$$

Calculemos uno de estos límites (el otro es similar) que es de la forma $0/0$. Por l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1+x}} = -1.$$

(iii) Por regla del cuociente:

$$f'(x) = \frac{-\ln(1+x)\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\ln(1-x)}{\ln^2(1+x)} = -\frac{(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)}{(1-x^2)\ln^2(1+x)}.$$

(iv) Por definición, una vez f reparada en $x = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\ln(1-h)}{\ln(1+h)} - (-1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1-h) + \ln(1+h)}{h\ln(1+h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{1-h} + \frac{1}{1+h}}{\ln(1+h) + \frac{h}{1+h}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{(1-h)^2} - \frac{1}{(1+h)^2}}{\frac{1}{1+h} + \frac{1}{(1+h)^2}} \\
&= \frac{-1-1}{1+1} = -1.
\end{aligned}$$

(v) Probemos que f es decreciente demostrando que $f' \le 0$. Notemos primero que

$$(1-x^2)\ln^2(1+x) > 0, \quad \forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

Entonces basta probar que el denominador en la expresión de la derivada es no negativo, esto es, bastaría probar que:

$$(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) \ge 0, \quad \forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

Usando la indicación de que $\ln z \ge 1 - \dfrac{1}{z}$ para $z = x+1$ y $z = x-1$ y notando que

$$z = x+1 > 0, z = x-1 > 0 \quad \forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$$

podemos acotar como sigue

$$(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x) \geq (1+x)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)+(1-x)\left(1-\frac{1}{1-x}\right) = x-x=0,$$

de donde se obtiene

$$f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (-1,1)\setminus\{0\}.$$

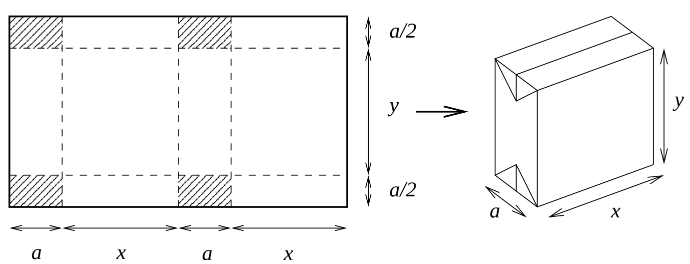
Entonces f es decreciente en los intervalos $(-1,0)$ y $(0,1)$.

Nota: No es inmediato que f sea **globalmente** decreciente, esto viene de la continuidad en $x=0$. Por ejemplo $1/x$ es decreciente en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$ pero no es decreciente globalmente. El no reparar en esta sutileza no tiene puntaje, aunque se puede premiar con [**0.5pto**] a un alumno que lo observó.

Puntaje:

(i)	[**0.6pto**]	Un límite
	[**0.6pto**]	El otro
(ii)	[**0.2pto**]	Condición de continuidad
	[**1pto**]	Uno de los límites (el otro es similar)
(iii)	[**1.2pto**]	Cálculo de f'
(iv)	[**0.2pto**]	Definición de $f'(0)$
	[**1pto**]	Cálculo de $f'(0)$
(v)	[**0.2pto**]	Condición $f' \leq 0$ implica f decreciente (ver Nota Pauta P1)
	[**0.4pto**]	Signo del denominador
	[**0.6pto**]	Signo del numerador y uso de la indicación

P3.- Un envase TetraPak se fabrica plegando un rectángulo de cartón como indica la figura (las regiones achuradas corresponden a los pliegues de las esquinas).



Se desean determinar las dimensiones óptimas a, x, y que minimicen la superficie del rectángulo <u>original</u> para un volumen total de 1000 (un litro).

(i) (1ptos.) Encuentre una expresión de la superficie sólo en términos de las cantidades a, x.

(ii) (2.5ptos.) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\frac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo.

(iii) (2.5ptos.) Use **(ii)** para obtener una expresión $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función (justifique por qué es mínimo). Explicite los valores óptimos de a, x, y.

Pauta.- **(i)** La superficie utilizada para fabricar el TetraPak está dada por

$$S = (2a + 2x)(y + a)$$

la restricción de volúmen viene dada por la igualdad

$$V = 1000 = axy$$

despejando y de esta última expresión y reemplazando en la primera:

$$S = 2(a + x)\left(\frac{1000}{ax} + a\right).$$

Nota: Como a, x, y representan longitudes entonces también tenemos que $a, x, y \geq 0$ y por otro lado de la restricción $axy = 1000$ es claro que $a, x, y > 0$.

(ii) Tomamos a como parámetro constante. Entonces derivando la expresión para

$$S(x) = 2(a + x)\left(\frac{1000}{ax} + a\right)$$

con respecto a x e igualando a cero se obtiene

$$S'(x) = 2\left(\frac{1000}{ax} + a\right) - 2(a + x)\frac{1000}{ax^2} = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1000}{ax} + a &= (a + x)\frac{1000}{ax^2} \\ 1000x + a^2x^2 &= 1000a + 1000x \\ x^2 &= \frac{1000}{a} \\ x &= \sqrt{\frac{1000}{a}}, \qquad \text{(pues } x > 0\text{).} \end{aligned}$$

Para justificar que $x(a) = \sqrt{\frac{1000}{a}}$ es un mínimo hay por lo menos tres caminos posibles: demostrar directamente que $S(x(a)) \leq S(x)$, $\forall x > 0$ o bien verificar que $S' \leq 0$ (S decreciente) para $x < x(a)$ y $S' \geq 0$ (S creciente) para $x > x(a)$ o bien verificar que $S''(x(a)) > 0$. Optamos por el análisis de la derivada: análogamente como se hizo antes, obtenemos que

$$S'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1000}{a}$$

esto es, $S' > 0$ para $x > 0$ si

$$x > \sqrt{\frac{1000}{a}} = x(a)$$

de modo que S es (est.) creciente para $x > x(a)$. Así también

$$S'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1000}{a}$$

esto es $S' < 0$ para $x > 0$ si

$$x < \sqrt{\frac{1000}{a}} = x(a)$$

de modo que S es (est.) decreciente para $0 < x < x(a)$. Luego $x(a)$ es un mínimo (global y estricto) de S para $x > 0$.

(iii) Usamos ahora **(ii)** y reemplazamos el valor óptimo $x(a)$ en la expresión para S para obtener

$$S(a) = 2(a + x(a)) \left(\frac{1000}{ax(a)} + a \right) = 2 \left(a + \sqrt{\frac{1000}{a}} \right) \left(\frac{1000}{a\sqrt{\frac{1000}{a}}} + a \right) = 2 \left(a + \sqrt{\frac{1000}{a}} \right)^2.$$

Para determinar el candidato a punto mínimo de $S(a)$, derivamos con respecto a la variable a e igualamos a cero:

$$S'(a) = 4 \left(a + \sqrt{\frac{1000}{a}} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{1000}}{2} a^{-3/2} \right) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} a^{3/2} &= \frac{\sqrt{1000}}{2} \\ a^3 &= \frac{1000}{4} = 250 \\ a &= \sqrt[3]{250} \\ a^* &= 5\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Para justificar que a^* es un punto de mínimo de $S(a)$ como antes, basta observar que

$$a > a^* \Rightarrow a^{3/2} > \frac{\sqrt{1000}}{2} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{1000}}{2} a^{-3/2} \right) > 0 \Rightarrow S'(a) > 0$$

y que del mismo modo

$$a < a^* \Rightarrow a^{3/2} < \frac{\sqrt{1000}}{2} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{1000}}{2} a^{-3/2} \right) < 0 \Rightarrow S'(a) < 0.$$

Los valores óptimos explícitos de a, x, y son entonces:

$$\begin{aligned} a^* &= 5\sqrt[3]{2} \\ x^* &= \sqrt{1000a^*} = \sqrt{10005\sqrt[3]{2}} = \sqrt{200\sqrt[3]{2}} = 10\sqrt{2^{2/3}} = 10\sqrt[3]{2} \\ y^* &= \frac{1000}{a^* x^*} = \frac{100}{5\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}} = \frac{20}{2^{2/3}} = 10\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Notas:

1. Hay un abuso de notación al llamar por $S(x)$ y $S(a)$ a dos funciones distintas, en realidad son $S(x)$ y $T(a) = S(x(a))$. Esto es muy común en las aplicaciones.
2. Si $V = 1000cm^3$ entonces $a^* \approx 6{,}3cm$, $x^* \approx 12{,}6cm$, $y^* \approx 12{,}6cm$. Además puede comprobar que $S^* = 900\sqrt[3]{2} \approx 714{,}3cm^2$, ¿corresponde esto a algún envase real?
3. Si no está convencido tomemos por ejemplo $a = 5$, $x = 10$, $y = 20$, entonces $V = 1000$ y $S = 2(a + x)(y + a) = 2(5 + 10)(20 + 5) = 2 \cdot 15 \cdot 25 = 750 > S^*$.

Puntaje:

(i)	**[0.2pto]**	Superficie en función de a, x, y
	[0.3pto]	Restricción de Volumen
	[0.5pto]	Expresión para S en función de a, x
(ii)	**[0.5pto]**	Derivada $S'(x)$
	[0.5pto]	Condición $S'(x(a)) = 0$
	[0.5pto]	Cálculo del punto $x(a)$
	[1pto]	Justificación de mínimo
(iii)	**[0.8pto]**	Derivada $S'(a)$
	[0.2pto]	Condición $S'(a^*) = 0$
	[0.5pto]	Cálculo del punto a^*
	[0.5pto]	Justificación de mínimo
	[0.5pto]	Valores explícitos